This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06610086 9

PBR

## Cet ouvrage se trouve aussi :

| | |
|---|---|
| A ANGOULÊME. . | chez PEREZ-LECLER. |
| BORDEAUX. . . | chez CHAUMAS. |
| BOURGES. . . . | — VERMEIL. |
| BREST. . . . . | — Mme Vve LEFOURNIER. |
| LILLE. . . . . | — VANACKÈRE. |
| LORIENT. . . . | — LEROUX-CASSART. |
| LYON. . . . . | — PERISSE frères. |
| | — GIBERTON et BRUN. |
| MARSEILLE. . . | — Mme Vve CAMOIN. |
| METZ. . . . . | — WARION. |
| MONTPELLIER. | — SÉWALLE. |
| NANCY. . . . . | — G. GRIMBLOT et Cie. |
| NANTES. . . . . | — FOREST aîné. |
| | — GUÉRAUD. |
| | — PETITPAS. |
| ORLÉANS. . . . | — GATINEAU. |
| RENNES. . . . . | — VERDIER. |
| ROCHEFORT. . | — Mme FLEURY. |
| | — PROUST-BRANDAY. |
| ROUEN. . . . . | — LEBRUMENT. |
| STRASBOURG. . | — TREUTTEL et WURTZ. |
| | — Mme LEVRAULT. |
| | — DERIVAUX. |
| TOULON. . . . | — MONGE et WILLAMUS. |
| TOULOUSE. . . | — Mlles GALLON sœurs. |
| | — BON et PRIVAT. |
| | — GIMET. |
| LEIPZIG. . . . . | — MICHELSEN. |
| LONDRES. . . . | — DULAU et Cie, Soho-Square. |
| | — BAILLIÈRE. |
| MADRID . . . . | — A. POUPART et frère. |
| | — JAYMEBON et Cie. |
| | — MONIER. |
| TURIN . . . . . | — BOCCA. |
| VIENNE. . . . . | — ROHMANN. |

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12

# ÉLÉMENTS
# DE STATIQUE,

SUIVIS DE

## QUATRE MÉMOIRES

Sur la Composition des Moments et des Aires; sur le Plan invariable du Système du monde; sur la Théorie générale de l'Équilibre et du Mouvement des systèmes; et sur une Théorie nouvelle de la Rotation des Corps;


Par L. POINSOT,

Pair de France, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Conseiller titulaire au Conseil royal de l'Université, grand officier de la Légion d'honneur, etc.


Ouvrage adopté pour l'Instruction publique.

NEUVIÈME ÉDITION,

REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.


TOR LIBRARY
NEW-YORK



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1848.

## Cet ouvrage se trouve aus

| | |
|---|---|
| A ANGOULÊME. . | chez PEREZ-LECLER. |
| BORDEAUX. . . | chez CHAUMAS. |
| BOURGES. . . . | — VERMEIL. |
| BREST. . . . . | — Mme Vve LEFOURN |
| LILLE. . . . . | — VANACKÈRE. |
| LORIENT. . . . | — LEROUX-CASSART. |
| LYON. . . . . | — PERISSE frères. |
| | — GIBERTON et BRUN |
| MARSEILLE. . . | — Mme Vve CAMOIN. |
| METZ. . . . . | — WARION. |
| MONTPELLIER. | — SÉWALLE. |
| NANCY. . . . . | — G. GRIMBLOT et C |
| NANTES. . . . . | — FOREST aîné. |
| | — GUÉRAUD. |
| | — PETITPAS. |
| ORLÉANS. . . . | — GATINEAU. |
| RENNES. . . . . | — VERDIER. |
| ROCHEFORT. . | — Mme FLEURY. |
| | — PROUST-BRANDAY. |
| ROUEN. . . . . | — LEBRUMENT. |
| STRASBOURG. . | — TREUTTEL et WUR |
| | — Mme LEVRAULT. |
| | — DERIVAUX. |
| TOULON. . . . | — MONGE et WILLAI |
| TOULOUSE. . . | — Mlles GALLON sœur |
| | — BON et PRIVAT. |
| | — GIMET. |
| LEIPZIG. . . . . | — MICHELSEN. |
| LONDRES. . . . | — DULAU et Cie, Soh |
| | — BAILLIÈRE. |
| MADRID . . . . | — A. POUPART et frè |
| | — JAYMEBON et Cie. |
| | — MONIER. |
| TURIN . . . . . | — BOCCA. |
| VIENNE. . . . . | — ROHMANN. |

IMPRIMERIE I
rue du Jar

# ÉLÉMENTS
# DE STATIQUE,

SUIVIS DE

## QUATRE MÉMOIRES

Sur la Composition des Moments et des Aires; sur le Plan invariable du Système du monde; sur la Théorie générale de l'Équilibre et du Mouvement des systèmes; et sur une Théorie nouvelle de la Rotation des Corps;


**Par L. POINSOT,**

Pair de France, Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Conseiller titulaire au Conseil royal de l'Université, grand officier de la Légion d'honneur, etc.


Ouvrage adopté pour l'Instruction publique.

**NEUVIÈME ÉDITION,**

REVUE, CORRIGÉE ET AUGMENTÉE.


ASTOR LIBRARY NEW-YORK



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1848.

*Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne por pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et du Libraire, sera contrefait. Les mesures nécess seront prises pour atteindre, conformément à la loi fabricateurs de ces exemplaires.*

Bachelier

# AVERTISSEMENT.

Cette neuvième édition de la *Statique* est, à quelques lignes près ajoutées (pages 482-485), entièrement conforme à l'édition précédente. Mais celle-ci avait reçu trois additions notables, qu'il est bon de rappeler dans cet Avertissement.

La première est formée de quelques alinéa qu'on a joints à l'article **68** de la *Composition générale des forces.* On y démontre, en passant, la position et les propriétés de cet *axe central* où se fait la réduction la plus simple de toutes les forces du système : théorèmes faciles qui achèvent naturellement cet article général, et complètent ainsi le chapitre des *Principes*, où l'on peut dire que tout le fond de notre théorie se trouve aujourd'hui renfermé.

La seconde addition consiste dans la Note II, relative au Mémoire sur l'*Équilibre et le mouvement des Systèmes.* Elle a pour objet la démonstration approfondie d'un point important de doctrine, qui n'était présenté, dans le Mémoire, que comme un corollaire tiré d'un raisonnement

assez délicat, et sur lequel il pouvait rester da l'esprit quelque nuage.

La troisième, enfin, est une addition consic rable que plusieurs personnes nous ont prié faire à cet Ouvrage. C'est une analyse de no *Théorie nouvelle de la Rotation des corps :* ar lyse rapide, il est vrai, dégagée de calculs et démonsstrations de détail, mais où la cha des idées et des raisonnements se fait part sentir, et qui, par cela même, est égalem propre à intéresser et à instruire de jeu géomètres, en exerçant leur esprit sur une questions les plus célèbres et les plus diffic de la Dynamique.

---

# TABLE
## DES MATIÈRES.

*N. B.* On a marqué d'une étoile les principaux articles qui ne sont pas exigés pour l'admission à l'École Polytechnique.


Pages.

PRÉLIMINAIRE..... 1

CHAPITRE Ier. — *Des principes*..... 15

SECT. Ire. — *Composition et décomposition des forces*..... *ibid.*

Composition des forces qui agissent suivant des directions parallèles..... 21

Composition des forces dont les directions concourent en un même point..... 35

SECT. II. — *Composition et décomposition des couples*..... 47

Transformation des couples; leur mesure..... 52

Composition des couples situés sur un même plan ou dans des plans parallèles..... 56

Composition des couples situés dans des plans quelconques..... 58

Manière plus simple d'exprimer les théorèmes qui concernent la composition des couples..... 65

Pages.

* D'un corps appuyé sur plusieurs plans..... 173

CHAP. III. — *Des centres de gravité*. . . 175

Définitions, théorèmes généraux sur la détermination du centre de gravité..... 175 à 190
Des centres de gravité des figures. ..... . 190
Du centre de gravité du triangle, du trapèze, etc.. 194
Du centre de gravité de la pyramide, du tronc, etc. 203
* Propriétés générales du centre de gravité..... 217

CHAP. IV. — *Des machines*.. . . . . 235

Définition générale des machines..... *ibid.*
*Du Levier*. ..... ..... ..... 240
De la charge du point d'appui. ..... 242
De la balance. .... ..... 250
De la Romaine.... ..... 253
Du peson..... 257
De la poulie..... 261
*Du Tour*. ..... 263
Des pressions exercées sur les appuis..... 267
*Du plan incliné*..... 271
De la pression exercée sur le plan..... 274
Applications à quelques exemples..... ... 279
De la vis ..... 288
Du Coin. ..... 294
De quelques machines composées..... 297
Des cordes..... ..... 299
* De la Chaînette..... 311
Des poulies et des moufles..... 316
Des roues dentées..... 321
Du cric..... ..... ..... 322

Pages.

De la vis sans fin..... 323

* Du Genou..... 324

* De la balance de *Roberval*..... 333

MÉMOIRE *sur la composition des moments et des aires dans la Mécanique*..... 343

MÉMOIRE *sur la théorie et la détermination de l'équateur du système solaire*..... 381

ADDITION au Mémoire qui précède..... 414

THÉORIE GÉNÉRALE *de l'équilibre et du mouvement des systèmes*..... 421

NOTE I. Sur un principe de la théorie précédente... 461

NOTE II. Sur un point de doctrine de la même théorie..... 467

NOTE III. DÉMONSTRATION du principe *des vitesses virtuelles*..... 475

ADDITION à la Note qui précède..... 482

THÉORIE NOUVELLE *de la rotation des corps*... 485

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

# ÉLÉMENTS

# DE STATIQUE.

## PRÉLIMINAIRE.

### I.

1. L'idée que nous avons des corps est telle, que nous ne supposons pas qu'ils aient besoin de mouvement pour exister. Ainsi, quoiqu'il n'y ait peut-être pas dans l'univers une seule molécule qui jouisse d'un repos absolu, même dans un temps limité très-court, nous n'en concevons pas moins clairement qu'un corps peut exister en repos.

Mais si ce corps est une fois en repos, il y demeurera toujours, à moins qu'une cause étrangère ne vienne l'en tirer; car, comme le mouvement ne peut avoir lieu que dans une certaine direction, il n'y aura pas de raison pour que le corps se meuve d'un côté plutôt que de tout autre; et, par conséquent, il ne se

mouvra point. Donc, si un corps en repos vient à se mouvoir, on peut être assuré que ce n'est qu'en vertu d'une cause étrangère qui agit sur lui. Cette cause, quelle qu'elle soit, qui ne nous est connue que par ses effets, nous l'appelons *force* ou *puissance*.

*La force est donc une cause quelconque de mouvement.*

## II.

**2.** Sans connaître la force en elle-même, nous concevons encore très-clairement qu'elle agit suivant une certaine direction, et avec une certaine intensité.

Nous acquérons presque en naissant l'idée de la direction de la force et de son intensité. Le sentiment de la pesanteur qui nous sollicite toujours du même côté, la vue d'un corps qui tombe ou qui reste suspendu au bout d'un fil, la différence des poids que la main éprouve, et une foule d'autres phénomènes aussi simples, nous donnent une idée de la direction et de l'intensité de la force, aussi incontestable que celle de notre existence.

Ainsi, nous regarderons comme évident que *toute force agit au point où elle est appliquée, suivant une certaine direction et avec une certaine intensité.*

## III.

3. Maintenant, si nous représentons les directions des forces par des lignes droites, et leurs intensités par des longueurs proportionnelles prises sur ces lignes, ou par des nombres, il est clair que les forces pourront être soumises au calcul comme toutes les autres grandeurs; et de là résulte ce problème général, dont la solution est l'objet de la Mécanique :

*Un corps ou système quelconque de corps étant sollicité par de certaines forces données, trouver le mouvement que ce corps prendra dans l'espace.*

Et, réciproquement : *Quelles doivent être les relations des forces qui agissent sur un système, pour que ce système prenne dans l'espace un mouvement donné;* ce qui est, au fond, la même question que la précédente.

4. Pour résoudre ce problème général, on commence par résoudre ce cas particulier où l'on demanderait quelles doivent être les relations des forces, pour que le système auquel elles sont appliquées prenne un mouvement égal à zéro, c'est-à-dire demeure en équilibre. Ce problème une fois résolu, il est très-facile d'y ramener l'autre; et voilà pourquoi on commence ordinairement l'étude de la Mécanique

par celle de la Statique, qu'on définit la *scien de l'équilibre des forces.*

L'autre partie de la Mécanique traite ensu de toutes les questions qui se rapportent mouvement des corps; elle s'appelle *Dyn mique*, ou science du mouvement. Mais nc ne nous occuperons ici que de la science l'équilibre.

IV.

5. Remarquez d'abord que dans la Stati proprement dite, il n'est pas nécessaire de c naître l'effet actuel des forces sur la matiè c'est-à-dire les divers mouvements qu'elles s capables de lui imprimer, eu égard à leurs tensités et à leurs directions; mais qu'il s de considérer les forces comme de simples g deurs homogènes, et, par conséquent, com rables, et d'assigner les rapports qui doi exister entre elles pour qu'elles se détrui mutuellement. Lorsque l'on passe de la thé de l'équilibre à celle du mouvement, il fau nouveaux principes sur l'évaluation des for car, ne calculant plus alors que leurs effet faut savoir les y rapporter : estimer, par ex ple, si une force double produit sur le m corps une vitesse double, ou si la même fc appliquée à un corps de masse double, pro

une vitesse deux fois moindre, etc. Mais ici, quelle que soit l'action des forces sur les corps, que les forces soient proportionnelles ou non à leurs effets sensibles, les vérités que nous allons exposer n'en subsisteront pas moins, parce que ces vérités résultent de la seule présence actuelle de plusieurs forces qui n'obtiennent aucun effet, mais qui se détruisent avec évidence : de sorte que l'état d'équilibre des corps reste comme un moment singulier de l'état de mouvement, où la mesure des forces par leurs effets, et leurs effets mêmes ont disparu.

**6.** Rigoureusement parlant, un corps en équilibre est dans le même état que s'il était en repos; car l'effet des forces étant anéanti pour toujours, ou s'anéantissant à chaque instant, si les forces sont sans cesse renaissantes, tout corps en équilibre est actuellement capable de se mouvoir en vertu d'une certaine force donnée, absolument comme il se serait mû en vertu de la même force, s'il eût été en repos. Cependant on peut distinguer l'équilibre d'avec le repos, en ce que, dans le second cas, le corps n'est sollicité par aucune force, au lieu que, dans l'autre, il est sollicité par des forces qui s'entre-détruisent.

Cette distinction, qui est nulle dans l'état

rigoureux des choses, devient sensible da les équilibres que la nature nous offre : presq aucun corps n'est exactement en équilibre; lorsqu'il nous paraît dans cette situation, existe néanmoins entre les forces qui le solli tent une lutte perpétuelle qui le fait osciller finiment peu, et le ramène continuellemen une position unique qu'il abandonne toujou Mais, *dans la solution mathématique des p blèmes, on doit regarder un corps en équili comme s'il était en repos; et, réciproqueme si un corps est en repos, ou sollicité par des fo quelconques, on peut lui supposer appliquées te nouvelles forces qu'on voudra, qui soient en é libre d'elles-mêmes, et l'état du corps ne sera p changé.*

On verra bientôt de nombreuses applicati de cette remarque.

V.

7. Ces notions préliminaires étant posé voyons comment on peut procéder à la cherche des conditions de l'équilibre pour système quelconque de corps, de figure i riable, sollicité par des forces quelconque Q, R, S, etc., appliquées en des points donné *b*, *c*, *d*, etc., du système.

On supposera d'abord que tous les corps

sans pesanteur, c'est-à-dire tels qu'ils seraient s'ils existaient seuls dans l'espace; de sorte qu'il n'y aura plus à considérer que les efforts des seules forces appliquées P, Q, R, S, etc., qui devront se contre-balancer mutuellement dans le cas de l'équilibre.

Ensuite il est facile de voir qu'il suffira de trouver les conditions de l'équilibre pour le simple système des points d'application $a$, $b$, $c$, $d$, etc., regardés comme un assemblage de points liés entre eux d'une manière invariable.

En effet, si l'on désigne par $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, etc., les mêmes points $a$, $b$, $c$, $d$, etc., du système, mais considérés seulement comme des points unis par des lignes droites, rigides et inextensibles; et si l'on suppose que les forces P, Q, R, S, etc., les maintiennent en équilibre, il est évident que les mêmes forces P, Q, R, S, etc., maintiendront aussi le système en équilibre. Car on pourrait imaginer que le système a été placé sur les points $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, etc., de manière que les points $a$, $b$, $c$, $d$, etc., coïncident actuellement avec eux. Le système étant laissé en repos dans cette situation, l'équilibre des points $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, etc., ne sera point troublé. Mais il est clair que l'équilibre subsisterait encore, si, au lieu de supposer les points $a$ et $a'$, $b$ et $b'$, $c$ et $c'$, etc., coïncidents, on les suppo-

sait unis d'une manière invincible, de sorte qu ne pût se séparer de $a'$, $b$ de $b'$, $c$ de $c'$, et ai des autres; d'où il résulte que les conditions l'équilibre entre des forces P, Q, R, S, et appliquées à un système quelconque de cor sont les mêmes conditions qui auraient l entre les mêmes forces P, Q, R, S, etc., ap quées au simple système des points d'appli tion $a$, $b$, $c$, $d$, etc., liés entre eux d'une mani invariable.

Ainsi, lorsque l'on cherchera les relations certaines forces qui se font équilibre autour c système quelconque solide, on pourra faire a traction de tous les corps du système, et s poser qu'il ne reste plus que les points d'ap cation $a$, $b$, $c$, $d$, etc., qu'on imaginera liés e eux de manière à ne pouvoir changer leurs tances mutuelles.

D'après ces considérations, on dégage problème et le poids et le volume des corps la question devient plus simple.

Par la suite, nous rendrons aux corps pesanteur, et nous aurons égard à leurs p respectifs, comme à de nouvelles forces faudrait combiner avec les autres, pour a l'équilibre. Nous pourrons, de cette mani appliquer les résultats de la Statique à l'é libre des corps naturels qui sont tous pesan

## VI.

8. Maintenant, puisqu'il ne reste plus à considérer dans l'équilibre des forces que trois choses, savoir : leurs intensités, leurs directions et leurs points d'application, il est visible que les conditions de l'équilibre ne sont autre chose que les relations mutuelles qui doivent exister entre ces trois choses, pour que l'équilibre ait lieu dans le système. Or on peut déjà comprendre, et l'on verra bientôt que ces relations peuvent être exprimées par des équations où l'on ferait entrer immédiatement les intensités des forces, leurs directions, au moyen des angles qu'elles forment avec des droites fixes dans l'espace, et leurs points d'application, au moyen des coordonnées qui en déterminent les positions respectives.

C'est ainsi qu'on peut se faire une idée du problème de la Statique, et se mettre au fait de l'état de la question.

Mais on pourra observer que, dans tout ce que nous venons de dire, il ne s'agit que d'un corps libre dans l'espace, tandis que l'on conçoit bien qu'un corps pourrait être assujetti à de certaines conditions, comme, par exemple, de tourner autour d'un point ou d'un axe fixe,

de s'appuyer constamment sur une surface in pénétrable, etc. Mais on verra par la suite q les résistances qu'un corps éprouve à cause d conditions étrangères qui l'assujettissent, pe vent toujours être remplacées par des for convenables, et qu'après cette substitution forces à la place des résistances, le corps p être regardé comme libre dans l'espace : ain était inutile de compliquer au commencem la question.

## VII.

9. Pour découvrir actuellement la route peut nous conduire aux conditions de l'é libre, représentons-nous un corps ou syst tenu en équilibre par des forces quelcon P, Q, R, S, etc., dirigées comme on vo dans l'espace.

Puisque toutes ces forces se font équili on voit que l'une quelconque d'entre elle force P par exemple, s'oppose seule à l'a de toutes les autres Q, R, S, etc.; d'où il p que l'effet de ces dernières est de sollicit système absolument comme une simple f égale et contraire à la force P.

C'est, en effet, ce qui a lieu, et ce qu'on porter à la dernière évidence au moyen

remarque précédente (**6**), et de cet axiome, que deux forces égales et opposées se font nécessairement équilibre (**12**).

Car supposons que l'on applique au système une force P′ parfaitement égale et contraire à la force P. Les forces P et P′ étant en équilibre, leur effet est nul de lui-même, et l'on peut regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action des forces Q, R, S, etc. Mais, d'un autre côté, la force P faisant équilibre aux forces Q, R, S, etc., leur effet est aussi nul de lui-même, et l'on peut regarder le corps comme n'étant plus soumis qu'à l'action de la simple force P′. L'état du corps est donc identiquement le même, soit qu'on le suppose sollicité par les forces Q, R, S, etc., soit qu'on le suppose sollicité par la seule force P′ égale et contraire à celle qui leur ferait équilibre.

Donc, puisqu'il peut arriver qu'une seule force soit capable de produire sur un corps le même effet que plusieurs, et en tienne parfaitement lieu, notre premier soin doit être de chercher à réduire les forces appliquées au plus petit nombre possible, et d'observer surtout la loi de cette réduction. Alors les conditions de l'équilibre entre toutes les forces se ramèneront aux conditions de l'équilibre entre ces forces

finales équivalentes aux premières, et devie
dront plus faciles à exprimer.

**10.** Cette force, qui est capable de produ
sur un corps le même effet que plusieurs aut
forces combinées, et qui peut à elle seule
tenir parfaitement lieu, se nomme *leur rés
tante.* D'où l'on voit, en rappelant ce qui a
dit plus haut, *que si plusieurs forces se font
tuellement équilibre sur un corps, l'une quelcon
d'entre elles est égale et directement opposée à
résultante de toutes les autres.*

Les autres forces, à l'égard de la résultan
se nomment les *composantes.* La loi d'après
quelle on trouve la résultante de plusieurs fo
se nomme la *composition des forces.* La même
(mais prise dans l'ordre inverse), d'après laqu
on substitue à une seule plusieurs forces ca
bles du même effet, ou dont la première se
la résultante, se nomme la *décomposition
forces.*

Nous allons donc commencer par ces
recherches, qui, au fond, n'en forment qu
seule, celle de la loi qui lie la résultante
composantes.

**11.** Souvent, pour abréger le discours
appellerons *forces parallèles*, des forces d

directions sont parallèles; *forces concourantes*, des forces dont les directions concourent, etc.

Nous désignerons ordinairement les forces par les lettres P, Q, R, S, etc., placées sur les lignes qui représentent leurs directions; et si une lettre, telle que A, indique le point d'application d'une force, telle que P par exemple, nous supposerons toujours que l'action de cette force a lieu de A vers la lettre P, ou que la force tire de A en P.

Si, pour représenter la quantité de cette force, on prend, sur sa direction, et à partir du point A, une certaine ligne terminée AB, on supposera de même que cette ligne est portée du côté où le point d'application A tend à se mouvoir. Ainsi, quand on dira simplement d'une force, qu'elle est représentée en grandeur et en direction par une certaine ligne terminée qui part du point d'application, il faudra sous-entendre que la force *tire* ce point vers l'extrémité de la ligne qui la représente.

On pourrait adopter l'hypothèse contraire, c'est-à-dire supposer que la force représentée par la ligne AB *pousse* le point d'application A pour l'éloigner de l'extrémité B de la ligne qui la représente : car il ne s'agit ici que d'une simple convention dont on est le maître, et l'on peut faire indifféremment l'une ou l'autre. Mais

une fois qu'elle est faite, il faut avoir soin
s'y conformer dans la figure, pour toutes l
forces que l'on considère, afin de donner
chacune d'elles le sens qu'elle doit avoir, et
l'énoncé du théorème toute son exactitude.

---

# CHAPITRE PREMIER.

## DES PRINCIPES.

### SECTION PREMIÈRE.

#### COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES FORCES.

*Axiomes, lemmes préliminaires, etc.*

**12.** Il est évident *que deux forces égales et contraires appliquées à un même point sont en équilibre.*

Il est encore évident *que deux forces égales et contraires appliquées aux extrémités d'une droite considérée comme une verge invariable de longueur, et agissantes dans la direction de cette droite, sont en équilibre;* car il n'y a pas de raison pour que le mouvement naisse d'un côté plutôt que de l'autre, comme dans le premier axiome.

*Corollaire.*

**13.** Il est facile de conclure de là que l'eff d'une force qui sollicite un corps ne peut êt changé en quelque point de sa direction qu'c la suppose appliquée, pourvu que ce poi soit un des points du corps lui-même, ou, s est au dehors, qu'il lui soit invariableme attaché.

Fig. 1. Car, soit une force quelconque P (*fig.* 1) a pliquée au point A d'un corps ou système que conque : si l'on prend, sur la direction de cet force, un autre point B invariablement lié système, de manière que la longueur AB res toujours constante, et si l'on applique au poi B deux forces P′, — P′ égales entre elles et à force P, et agissantes dans la direction de A le point A sera encore sollicité de la même m nière qu'auparavant; car l'effet des deux forc P′ et — P′ est nul de lui-même. Mais en con dérant la force P et son égale et contraire — appliquée en B, il est manifeste que leur ef est aussi nul. On peut donc les supprimer, et ne reste plus que la force P′, qui n'est au chose que la force P, mais appliquée au point de sa direction ; et le point A n'a pas cessé d'ê sollicité de la même manière.

*On peut donc appliquer une force en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier point d'application par une ligne droite rigide et inextensible.*

*Remarque.*

Lorsque nous changerons ainsi les points d'application des forces, nous ne répéterons pas toujours que l'on doit supposer les nouveaux points invariablement attachés aux premiers, mais il faudra toujours le sous-entendre.

*Lemme.*

**14.** Lorsque deux forces P et Q (*fig.* 2) sont appliquées à un même point A sous un angle quelconque, on conçoit bien qu'une troisième force R, appliquée convenablement au point A, pourrait faire équilibre aux deux forces P et Q; car, en vertu des efforts combinés des deux forces P et Q, le point A tend à quitter le lieu où il est : or, il ne peut s'échapper que d'un seul côté, et, par conséquent, si l'on applique une force convenable en sens contraire, ce point demeurera en équilibre. Fig. 2.

Les trois forces P, Q, R, étant en équilibre autour du point A, la force R est égale et directement opposée à la résultante des deux autres (**10**) : donc deux forces P et Q qui concourent ont une résultante.

En second lieu, il est visible que cette rés
tante doit être dans le plan de leurs directi
Fig. 3. AP, AQ (*fig.* 3); car il n'y a pas de raison p
qu'elle ait au-dessus du plan une certaine p
tion, plutôt que la position parfaitement sy
trique au-dessous.

De plus, elle doit être dirigée dans l'an
PAQ des deux forces; car il est clair qu
point A ne peut se mouvoir dans la partie
plan qui est au-dessus de la ligne AQ, vers
de même, il ne peut se mouvoir au-dessus
la ligne AP, vers B; et, par conséquent, i
pourra se mouvoir que dans l'angle PAQ; e
résultante R devra être dirigée dans l'intér
de cet angle.

*Remarque.*

**15.** Il n'y a qu'un seul cas où l'on puisse
*à priori* quelle sera la direction de la r
tante : c'est celui où les deux forces P et Q
égales. Alors il est clair que la résultante d
en deux également l'angle qu'elles forment e
elles; car il n'y a pas de raison pour que
résultante fasse avec l'une des composant
angle plus petit qu'avec l'autre.

*Axiome fondamental.*

**16.** *Lorsque les deux forces* P *et* Q *ag*
*dans la même direction et dans le même sens,*

*visible, et l'on doit accorder comme un axiome, que ces forces s'ajoutent et donnent une résultante égale à leur somme* $P + Q$.

*Remarque.*

Cet axiome est le fondement de toute la science de l'équilibre. On peut le regarder, si l'on veut, comme une espèce de définition, ou de *demande*, qu'il ne faut pas essayer de démontrer; car elle est comprise dans l'idée même de la force considérée comme *grandeur*, c'est-à-dire comme susceptible d'être augmentée ou diminuée. Et, en effet, quelle idée pourrait-on se faire, par exemple, d'une force *double* ou *triple* d'une autre, si l'on ne regardait cette force comme la réunion actuelle de *deux* ou de *trois* forces égales qui tirent à la fois le même point dans le même sens? C'est ce qui a été naturellement sous-entendu dans tout ce qui précède. Au reste, ce *postulatum* est le seul que la science exige; après quoi tous les théorèmes de la Statique rationnelle ne sont plus, au fond, que des théorèmes de Géométrie.

*Corollaire.*

**17**. De l'axiome qui précède on peut conclure (en combinant successivement les forces deux à deux) que la résultante de tant de forces que l'on

voudra, qui agissent dans une même directi et dans le même sens, est égale à leur somı totale, et agit dans la même direction;

Que lorsque deux forces inégales P et agissent en sens contraires dans une même ı rection, leur résultante est égale à la différeı P — Q des forces, et qu'elle agit dans le sens la plus grande; car on peut concevoir dans plus grande, que je suppose P par exemple, ı force égale et contraire à Q, et qui la détrı On peut supprimer ces deux forces-là, et le pc est actuellement tiré par la différence P — Q deux forces P et Q.

D'où l'on voit qu'en général, *la résultant tant de forces que l'on voudra, agissantes dar même direction, est égale à l'excès de la son de celles qui tirent dans un sens, sur la somm celles qui tirent dans le sens contraire, et qu'elle dans le sens de la plus grande somme.*

*Remarque.*

**18.** Telles sont quelques-unes des prop tions les plus élémentaires, dont on déco la vérité *à priori*, et presque à la premièr spection. Le cas le plus simple de la comp tion des forces, et en même temps celui où connaît tout d'un coup la résultante, est demment le cas des forces qui agissent

une même direction. Nous allons donc commencer la composition des forces par celles qui s'y ramènent immédiatement.

## *Composition des forces qui agissent suivant des directions parallèles.*

### *Théorème* I.

**19.** *Si deux forces quelconques* P *et* Q (fig. 4), *parallèles et de même sens, sont appliquées aux extrémités* A *et* B *d'une droite rigide* AB, *je dis :* Fig 4.

1°. *Que ces deux forces ont une résultante, et que cette résultante doit être appliquée à la ligne* AB *entre les deux points* A *et* B;

2°. *Que cette force est parallèle aux composantes* P *et* Q, *et égale à leur somme.*

1°. Appliquez à volonté aux deux points A et B deux forces M et N égales et contraires, et qui agissent dans la direction AB. L'effet de ces deux forces sera nul, et, par conséquent, l'effet des deux forces P et Q ne sera pas changé : mais les deux forces M et P appliquées en A ont une résultante S appliquée au point A, et dirigée dans l'angle MAP (**14**). De même, les deux forces N et Q ont une résultante T, appliquée en B et dirigée dans l'angle NBQ. Concevez qu'on ait pris ces deux résultantes, et qu'on les

ait appliquées toutes deux au point D où le
directions vont nécessairement se couper;
résultante des deux forces S et T sera abso
ment la même que celle des deux forces P et
or, étant appliquée en D, et devant être
rigée dans l'angle ADB, elle ira passer entr
et B, en un certain point C, où l'on pourr
supposer appliquée.

2°. Maintenant, pour démontrer que c
résultante est parallèle aux forces P et Q
égale à leur somme, imaginons qu'au poin
on redécompose la force S en deux com
santes M′ et P′, parfaitement égales et parall
aux premières M et P; de même, qu'on re
compose la force T en deux composantes
et Q′, parfaitement égales et parallèles aux
mières N et Q. Les deux forces M′ et N′ se
égales; de plus, elles seront directement
posées, puisque, appliquées à un même poir
elles sont parallèles à une même droite MN
par conséquent, leur effet sera absolument
Il ne restera donc que les deux forces P′ et
respectivement égales et parallèles aux fo
P et Q. Or, ces deux forces étant évidem
dans une même direction, se composeron
une seule R, égale à leur somme P′ + Q
P + Q. *Ce qu'il fallait démontrer.*

*Corollaire* I.

**20.** Si les deux forces P et Q (*fig.* 5) sont égales entre elles, le point C d'application de la résultante sera au milieu de la ligne AB. Prenons, en effet, les deux forces M et N dont on est maître, égales aux forces P et Q. La résultante S des deux forces égales M et P divisera en deux également l'angle MAP (**15**); et à cause de DC parallèle à la ligne AP, le triangle ACD sera isocèle. Par une raison toute semblable, le triangle BCD sera isocèle; et l'on aura, d'une part, AC = CD, et, de l'autre, CD = CB : d'où AC = CB. Fig. 5.

*Corollaire* II.

**21.** Il résulte de là, que la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra, égales deux à deux, et appliquées symétriquement à des distances égales du milieu d'une même droite, est égale à la somme de toutes ces forces, leur est parallèle, et passe par le milieu de la droite d'application. Car, en combinant successivement deux à deux les forces égales placées de part et d'autre à des distances égales du milieu de la ligne droite, leurs résultantes successives passeront toutes par ce même point, et s'ajou-

teront ensuite, comme étant de même sens de même direction.

**22.** Et, réciproquement, on pourra décon poser toute force P appliquée à une ligne en ta d'autres forces parallèles qu'on voudra, appl quées à différents points de cette ligne, pour que ces forces, deux à deux, soient égales égales distances du point d'application de force P, et que leur somme totale soit égale cette même force.

*Théorème* II.

Fig. 6. **23.** *Le point* C (fig. 6) *d'application de la r sultante de deux forces parallèles* P *et* Q *qui agiss aux extrémités* A *et* B *d'une droite inflexible* A *partage cette droite dans la raison réciproque de à* Q; *de sorte que l'on a* P : Q :: BC : AB.

Supposons d'abord que les forces P et soient commensurables, c'est-à-dire soient en elles comme deux nombres entiers $m$ et $n$.

Divisons AB au point H en deux parties dir tement proportionnelles aux deux forces P et de manière qu'on ait AH : BH :: P : Q, et, p conséquent, :: $m : n$. Sur le prolongement la ligne inflexible AB, prenons AG = AH BK = BH. Le point A sera le milieu de GH, le point B le milieu de HK.

Cela posé, puisque les forces P et Q sont entre elles comme les lignes AH et BH, elles seront aussi entre elles comme les mêmes lignes doublées, c'est-à-dire comme les lignes GH et HK. Et comme il y a, par hypothèse, dans la ligne AH, $m$ mesures telles que BH en contient $n$, il y aura $2m$ mesures dans GH, et $2n$ mesures égales dans HK. Or on peut décomposer la force P en $2m$ forces égales et parallèles, appliquées aux $2m$ points milieux des communes mesures de la ligne GH (**22**); et la force Q en $2n$ forces parallèles, égales entre elles et aux premières, appliquées aux $2n$ points milieux des communes mesures de la ligne HK. Maintenant toutes ces forces égales, étant équidistantes, se trouveront placées deux à deux à égales distances du milieu C de la ligne entière GK, et, par conséquent, leur résultante générale, qui est celle des deux forces P et Q, passera nécessairement par le milieu de la ligne GK.

Mais à cause de GC = AC, il vient, en retranchant la partie commune AC, BC = AG = AH; et en ajoutant de part et d'autre CH, AC = BH. Donc puisque l'on a P : Q :: AH : BH, on a aussi :

$$P : Q :: BC : AC.$$

Supposons, en second lieu, que les deux

forces P et Q ne soient pas commensurabl

Je remarque d'abord que si la résultante

Fig. 7. deux forces quelconques P et Q (*fig.* 7) app quées aux points A et B, tombe en C, la rés tante de la force P et d'une force Q + I > tombera entre le point C et le point B; c'e à-dire que le point d'application de la résulta s'approchera du point d'application de la co posante qui aura augmenté. En effet, pour tr ver la résultante des deux composantes P Q + I, on peut prendre d'abord la résulta R de P et Q, qui passe au point C, par hy thèse, et ensuite celle de R et de I, don point d'application sera entre C et B (**19**).

Maintenant, si la résultante des deux fo

Fig. 8. incommensurables P et Q (*fig.* 8) ne passe au point C, qui est tel qu'on a P : Q : : BC : elle passera en un autre point situé entre C, ou entre C et B. Supposons que ce soit e entre A et C. Partagez la ligne AB en pa égales toutes plus petites que GC, il y aur moins un point de division entre C et G. S ce point : les deux lignes AI et BI seront mensurables, et le point I pourra être cons comme le point d'application de la résul de deux forces P et Q′ qui seraient telles aurait P : Q′ : : BI : AI, ce qui donne Q (puisqu'on a, par hypothèse, P : Q : : BC :

Mais la résultante des deux forces P et Q′ passant en I, celle des deux forces P et Q > Q′ passera entre I et B, et ne pourra tomber en G, contre l'hypothèse.

On ferait voir absolument de la même manière qu'elle ne peut tomber entre C et B; et, par conséquent, elle passe nécessairement en C.

*Corollaire* I.

**24.** Lorsque trois forces parallèles P, Q, R (*fig.* 9) sont en équilibre sur une ligne AB, l'une d'entre elles est égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Ainsi la force Q, par exemple, prise en sens contraire, est la résultante des deux forces P et R. Comme les deux forces P et Q tirent dans le même sens, la force R est égale à P + Q, et, par conséquent, Q = R — P; d'où il suit que la résultante de deux forces parallèles qui agissent en sens contraires est égale à leur différence, et tire du même côté que la plus grande. Fig. 9.

**25.** Les deux forces P et R étant données, ainsi que la distance AC qui sépare leurs points d'application, si l'on demande le point d'application de la résultante Q, on fera cette proportion, P : Q :: BC : AC; d'où l'on tire P + Q :

Q : : BC + AC : AC, c'est-à-dire R : Q : : AB : AC proportion qui fera connaître AB, et, par conséquent, le point B.

*Corollaire* II.

26. Supposons que les deux forces P et soient égales, la résultante Q sera zéro, et la distance AB de son point d'application sera, par proportion ci-dessus, $\frac{R \times AC}{0}$, c'est-à-dire infini

Si les deux forces P et R, au lieu d'être égales, différaient d'une quantité très-petite, résultante Q, qui est égale à cette différenc serait très-petite, et la distance AB $= \frac{R \times}{Q}$ serait très-grande, à cause du dénominateur très-petit : ainsi, plus les deux forces s'appr chent de l'égalité, plus la résultante diminu et plus la distance du point où elle est app quée augmente. De sorte que, lorsque les de forces deviennent parfaitement égales, la r sultante est nulle, et la distance du point d'a plication infinie; ce qui paraît annoncer qu n'y a plus alors de résultante, ou, en term plus clairs, qu'on ne peut pas trouver actu lement une force unique qui fasse équilib à deux forces égales, parallèles et de se opposés.

**27.** Mais, pour ne laisser aucun nuage sur cette dernière conséquence, imaginons, s'il est possible, qu'une force unique R fasse équilibre aux deux forces P et — P, parfaitement égales, parallèles et contraires.

D'abord, quelle que soit la position de cette force unique à l'égard des deux proposées, on lui trouvera sur-le-champ, dans un sens contraire, une autre position toute semblable à l'égard des mêmes forces; car tout est égal de part et d'autre. Si donc une force R fait équilibre aux deux forces P et — P, il y a une autre force — R égale, parallèle et de sens opposé, qui leur ferait aussi équilibre. Ajoutez cette seconde force — R; et pour ne rien changer, détruisez-la immédiatement par une force R′ égale et contraire. Il y aura donc équilibre entre les cinq forces R, P, — P, — R et R′. Mais il y a équilibre entre les trois forces P, — P et — R: donc il y aurait équilibre entre les deux forces restantes R et R′; ce qui est impossible, puisque ces deux forces égales et parallèles agissent dans le même sens (**19**).

Ainsi les deux forces P et — P ne peuvent être tenues en équilibre par aucune simple force, et, par conséquent, elles n'ont point de résultante unique.

Nous reviendrons bientôt sur ces sortes de

forces, dont la considération, qui n'avait pa
jusqu'ici que comme un cas singulier, fera
seconde partie essentielle de nos Éléments.

*Corollaire* III.

**28**. De même que l'on compose en une se
deux forces parallèles qui agissent à des poi
donnés d'une ligne, on peut aussi décompo
une force quelconque R (*fig.* 6), appliqué
un point C d'une droite inflexible, en de
autres P et Q qui lui soient parallèles, et
agissent en des points donnés A et B de ce
droite. Il ne s'agit pour cela que de partage
force R en deux autres qui soient entre e
dans le rapport des distances BC et AC; et p
trouver la force Q par exemple, on se ser
de la proportion R:Q::AB:AC, dans laqu
il n'y a que Q d'inconnue. La force P sera é
à R — Q.

Si le point C d'application de la force
Fig. 10. (*fig.* 10) qu'on veut décomposer ne tom
pas entre A et B, points d'application do
des composantes P et Q que l'on cherche,
aurait de même la proportion R:Q::AB:
qui ferait connaître la force Q; mais la for
serait égale à R + Q.

*Corollaire* IV.

**29.** Quand on sait déterminer la résultante de deux forces parallèles, on peut facilement trouver celle de tant de forces parallèlesqu'on voudra, appliquées aux différents points d'un système quelconque de figure invariable.

Soient, par exemple, les quatre forces parallèles P, P′, P″, P‴ (*fig.* 11), appliquées respectivement aux quatre points A, B, C, D, situés d'une manière quelconque dans l'espace, et liés entre eux d'une manière invariable. En considérant ces forces deux à deux, elles sont situées dans un même plan. Ainsi l'on peut prendre d'abord la résultante X des deux forces P et P′; elle sera égale à leur somme P + P′, et passera en un point I de la ligne AB, qu'on trouvera en divisant AB dans la raison inverse de P à P′. La résultante X étant ainsi déterminée, on joindra le point I où elle agit, au point C de la troisième force P″. Les deux forces X et P″ étant parallèles, on en prendra la résultante X′, comme nous avons fait tout à l'heure : cette résultante sera égale à leur somme X + P″, et le point F où elle devra être appliquée se trouvera en divisant la droite CI, dans la raison réciproque de X à P″. Joignant enfin le point F au point D d'application de la quatrième force P‴, Fig. 11.

et divisant la droite FD en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces X′ et P‴, on aura le point G d'application de la résultante générale R, qui sera parallèle aux deux forces X′ et P‴, et, par conséquent, à toutes les composantes; égale à leur somme X′ + P‴, et, par conséquent, à la somme de toutes les composantes.

Le raisonnement que nous venons de faire s'étend manifestement à un nombre quelconque de forces parallèles.

Si parmi les forces P, P′, P″, etc., les unes agissaient dans un sens, les autres dans le sens contraire, on commencerait par prendre la résultante de toutes celles qui agissent dans le même sens, on chercherait ensuite la résultante de celles qui agissent dans le sens contraire; et toutes les forces étant alors réduites à deux forces parallèles et de sens contraires, on en trouverait la résultante par ce que nous avons dit plus haut.

**30.** On peut donc, en général, déterminer la position et la quantité de la résultante de tant de forces parallèles qu'on voudra: *cette résultante sera parallèle aux forces, et égale à l'excès de la somme de celles qui tirent dans un sens, sur la somme de celles qui tirent dans le sens contraire.*

J'ai dit *en général*, parce qu'il peut arriver que la résultante des forces qui tirent dans un sens soit parfaitement égale à la résultante de celles qui tirent dans le sens contraire, sans lui être directement opposée ; et alors il n'y a pas de résultante unique, comme nous l'avons vu plus haut.

*Corollaire* V.

**31**. Supposons que les quatre forces P, P′, P″, P‴, sans changer de grandeur, sans cesser d'être parallèles et de passer aux mêmes points respectifs A, B, C, D, viennent à prendre les positions $p$, $p'$, $p''$, $p'''$ dans l'espace.

Si l'on en cherche la résultante, en suivant le même ordre que plus haut, on trouvera d'abord que la résultante $x$ de $p$ et $p'$ passe au même point I que la résultante X de P et P′, et qu'elle lui est égale. Elle passera par le même point, parce que son point d'application doit diviser la même droite AB dans la raison réciproque de $p$ à $p'$, qui est la même que celle de P à P′. Elle lui sera égale, parce qu'on aura $P + P' = p + p'$. On trouvera de même que la résultante $x'$ de $x$ et $p''$ passera au même point F que la résultante X′ de X et P″, et qu'elle lui sera égale, et ainsi de suite : de sorte que la résultante générale des quatre forces $p, p', p'', p'''$,

passera au même point que la résultante de quatre forces P, P′, P″, P‴; et cela est général quel que soit le nombre des forces. D'où l'o peut conclure ce théorème remarquable :

**32.** *Si l'on considère un système quelconqu de forces parallèles, appliquées à un assemblag de points* A, B, C, D, *etc., et qu'on inclin successivement tout le système de ces forces dan diverses situations, de manière que les mêm forces passent toujours par les mêmes points, conservent leurs grandeurs et leur parallélism les résultantes générales qu'on trouvera successiv ment dans chacune de ces positions se croisero toutes au même point.*

Ce point d'intersection des résultantes su cessives se nomme le *centre des forces par lèles.* Nous aurons occasion d'en parler pl loin, quand il sera question des centres gravité.

On peut remarquer, au reste, que dans démonstration précédente, il n'est pas néc saire de supposer que les forces conservent to jours les mêmes grandeurs; il suffit que, d les positions successives du groupe, elles meurent proportionnelles.

## *Composition des forces dont les directions concourent en un même point.*

### *Théorème* III.

**33.** *La résultante des deux forces quelconques* P *et* Q (fig. 12) *appliquées à un même point* A, *sous un angle quelconque; est dirigée suivant la diagonale du parallélogramme* ABCD *construit sur les deux lignes* AB, AC, *qui représentent les forces* P *et* Q *en grandeur et en direction.* Fig. 12.

D'abord, nous avons vu (14) que cette résultante doit être dans le plan des deux forces P et Q; en second lieu, qu'elle doit être appliquée au point A, puisque cette résultante, par hypothèse, doit solliciter le point A absolument de la même manière que les deux forces P et Q.

Je dis maintenant qu'elle doit passer au point D, extrémité de la diagonale AD.

Prenons, en effet, sur le prolongement de la ligne BD la partie DG = DC, et achevons le losange CDGH. Appliquons aux points G et H, et dans la direction de GH, deux forces Q′ et Q″ contraires, égales entre elles et à la force Q. Il est facile de voir que la résultante des quatre forces P, Q, Q′ et Q″ doit passer au

point D. Car, 1° à cause de $Q' = Q$, les deux forces parallèles P et $Q'$ sont entre elles comme les côtés AB, AC, ou comme DC et DB, ou bien, à cause de $DC = DG$, comme les lignes DG et DB, et, par conséquent (**23**), leur résultante S passe en D; 2° les deux forces Q et $Q''$ étant égales, leur résultante T, prolongée, divise en deux également l'angle CHG du losange CDGH, et va passer aussi par le point D, où l'on peut la supposer appliquée. Donc la résultante générale, qui est celle des deux forces S et T, passe au point D.

Mais les deux forces $Q'$ et $Q''$ appliquées sur GH étant parfaitement égales et contraires, leur effet est absolument nul, et la résultante des quatre forces P, Q, $Q'$ et $Q''$ est identiquement la même que celle des deux forces P et Q. Donc, puisque la première passe en D, celle des deux forces P et Q passe aussi au même point.

Puisque la résultante passe à la fois par les deux points A et D, elle est donc nécessairement dirigée suivant la diagonale AD.

*Corollaire.*

**34.** Concluons de là que si l'on connaissait seulement les directions des deux forces P
Fig. 13. et Q (*fig.* 13), et celle de leur résultante R, on pourrait déterminer le rapport de la force P

à la force Q. Car, en prenant sur la direction de la résultante un point quelconque D, et menant de ce point deux parallèles DC et DB aux directions des composantes P et Q, et qui rencontrent ces directions en C et B, on aurait nécessairement P : Q :: AB : AC. Sans quoi l'on aurait P est à Q comme AB est à une ligne AO plus petite ou plus grande que AC; et alors la résultante des deux forces P et Q serait dirigée suivant la diagonale AI d'un parallélogramme AOIB différent du parallélogramme ABDC; ce qui est contre l'hypothèse.

*Théorème* IV.

**35.** *La résultante des deux forces quelconques* P *et* Q (fig. 14) *appliquées à un même point* A, *est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme* ABDC, *construit sur les deux lignes* AB, AC *qui représentent ces forces en grandeur et en direction.* Fig. 14.

Nous avons déjà vu que cette résultante est dirigée suivant la diagonale; reste à faire voir qu'elle est représentée en quantité par la diagonale elle-même.

Soit R cette résultante : supposez qu'elle soit appliquée au point A sur le prolongement de la diagonale DA, en sens contraire de son ac-

tion. Les trois forces P, Q, R seront en équilib sur le point A. Donc l'une d'elles, la force par exemple, sera égale et directement opp sée à la résultante des deux autres P et R. Do la direction de la force Q, prolongée, sera ce de la résultante des deux forces P et R. Do si, du point B, vous menez à la direction A la parallèle BG qui rencontre en G le prol gement de QA, et du point G, à la direction A la parallèle GH qui rencontre en H la direct de la force R, les deux forces P et R seront tre elles comme les côtés AB, AH du parallé gramme ABGH (34). Mais la ligne AB rep sente actuellement la force P; donc la ligne représente la force R. Or, par les parallèles, a AH = BG = AD; donc, etc.

*Corollaire* I.

36. Puisque les trois forces P, Q, R s entre elles comme les trois lignes AB, AC, et que dans le parallélogramme ABDC o AB = CD, on peut dire que ces trois forces s entre elles comme les trois côtés CD, CA et du triangle ACD. Mais ces trois côtés sont e eux comme les sinus des angles opposés C CDA, ACD, et à cause des parallèles, l'a CDA = l'angle BAD, l'angle ACD est sup ment de l'angle BAC, et, par conséquent,

même sinus; on a donc

$$P : Q : R :: \sin CAD : \sin BAD : \sin BAC.$$

D'où l'on peut conclure que, la résultante de deux forces P et Q étant représentée par le sinus de l'angle formé par leurs directions, les deux forces P et Q sont représentées réciproquement par les sinus des deux angles adjacents à la direction de la résultante; ou, si l'on veut, *chacune des forces* P, Q, R *est comme le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres.*

*Remarque.*

**37.** On peut voir par là, et mieux encore par la considération immédiate du parallélogramme des forces, que lorsque deux forces agissent sur un même point sous un angle qui n'est pas égal à deux droits, elles ne peuvent jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes, chacune en particulier.

Car, si aucune des deux forces n'était nulle, on pourrait construire un parallélogramme sur les deux lignes qui les représentent en grandeur et en direction, et la diagonale de ce parallélogramme serait la résultante.

Si l'une d'elles seulement était nulle, la seconde serait la résultante; et, par conséquent, la résultante ne peut être nulle, à moins que les

composantes ne soient toutes deux nulles même temps.

Lorsque les deux composantes agissent s un angle égal à deux angles droits, elles s alors contraires, et la résultante n'est pas n dans le seul cas où ces deux composantes s nulles toutes deux, mais encore dans celui elles sont égales.

*Corollaire* II.

**38.** On peut toujours décomposer une fo donnée R en deux autres P et Q dirigées suiv
Fig. 15. des lignes données AP, AQ (*fig.* 15), pou que ces directions et celle de la force R soi comprises dans un même plan et concouren même point A; car, prenant sur la directio la force R une partie AD qui représente quantité, et par le point D menant les dro DC, DB parallèles aux directions données AQ, on formera un parallélogramme ABI dont les côtés AB, AC représenteront les fo demandées P et Q.

Si l'on veut calculer immédiatement l grandeurs, on pourra faire ces deux pro tions :

$$R : P :: \sin BAC : \sin CAD,$$
$$R : Q :: \sin BAC : \sin BAD,$$

dans lesquelles il n'y a que P et Q d'inconn

*Remarque.*

**39.** Si l'angle BAC était droit, on aurait, en supposant le rayon $= 1$, sin BAC $= 1$; sin CAD $=$ cos BAD; et, réciproquement, sin BAD $=$ cos CAD; et les deux proportions ci-dessus deviendraient

$$R : P :: 1 : \cos BAD,$$
$$R : Q :: 1 : \cos CAD.$$

D'où $P = R . \cos BAD$, et $Q = R . \cos CAD$.

Il résulte de là que lorsqu'on décompose une force en deux autres qui agissent suivant des directions rectangulaires entre elles, on trouve chaque composante en multipliant la force proposée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la direction de cette composante.

Chaque composante est représentée par la projection de la résultante sur sa direction, et c'est ce qu'on appelle souvent la force *estimée* suivant cette direction. Ainsi R.cos BAD, ou la composante P, est la force R *estimée* suivant la direction AP.

*Corollaire* III.

**40.** Quand on sait déterminer la résultante de deux forces appliquées à un point, on peut déterminer celle de tant de forces P, Q, R, S, etc.,

qu'on voudra, appliquées à un même point
et dirigées d'une manière arbitraire dans l'e
pace. Car, en considérant d'abord deux que
conques de ces forces, comme les forces P et
par exemple, ces deux forces seront dans
même plan, et l'on en déterminera la rés
tante comme nous l'avons fait tout à l'heu
Soit X cette résultante; on prendra semblabl
ment la résultante de la force X et d'une au
telle que R. Combinant ensuite cette résultan
que je désigne par Y, avec une nouvelle force
on aura leur résultante Z, qui sera celle
quatre forces P, Q, R, S; et continuant ain
on arrivera nécessairement à la résultante
nérale.

Si toutes les forces P, Q, R, S, etc., s
dans un même plan, les résultantes successi
X, Y, Z, etc., seront dans ce même plan,
par conséquent, la résultante générale y s
aussi.

Si toutes les forces sont en équilibre,
résultante générale sera nulle.

Par cette composition successive de plusie
forces autour d'un même point, on voit enc
que, si l'on décrit dans l'espace un cont
polygonal dont les côtés successifs soient pa
lèles et proportionnels à ces forces, la dr
qui ferme ce contour et achève ainsi le po

gone, est parallèle et proportionnelle à la résultante générale de toutes les forces; de sorte que si le polygone se trouve fermé de lui-même, la résultante est nulle, et toutes les forces sont en équilibre autour du point qu'elles sollicitent.

Le théorème suivant n'est, au fond, qu'un cas particulier de cette élégante proposition; mais, comme il est d'un fréquent usage en Mécanique, nous allons l'énoncer et le démontrer expressément.

*Théorème* V.

**41.** *Si trois forces* X, Y, Z, *appliquées à un même point* A (fig. 16) *dans l'espace sont représentées par les trois lignes* AB, AC, AD, *et qu'on achève le parallélipipède* A...F, *la résultante* R *de ces trois forces sera représentée par la diagonale* AF *de ce parallélipipède.* Fig. 16.

En effet, les deux forces X et Y, qui sont représentées par les deux côtés du parallélogramme ABGC, donneront pour résultante une force P représentée par la diagonale AG de ce parallélogramme.

Ensuite, à cause de AD égal et parallèle à GF, la figure AGFD sera un parallélogramme, et, par conséquent, les deux forces P et Z donneront une résultante R représentée par la dia-

gonale AF, laquelle est en même temps la di
gonale du parallélipipède proposé.

*Remarque.*

**42.** Observons sur-le-champ, comme
n° **37**, que tant que les trois forces X, Y,
ne seront pas dans un même plan, elles
pourront jamais donner une résultante nulle,
moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes
particulier.

Car, si aucune d'elles n'était nulle, on poı
rait construire le parallélipipède sur les ligr
qui les représentent en grandeur et en dir
tion, et la diagonale serait la résultante.

Si l'une d'elles seulement était nulle, les de
autres qui, par hypothèse, ne sont pas en lig
droite, auraient une résultante.

Enfin, si deux d'entre elles seulement étai
nulles, la troisième serait la résultante, et, p
conséquent, les composantes X, Y, Z doiv
être nulles toutes trois, pour donner une ré
tante nulle.

*Corollaire* I.

**43.** On voit par le théorème précédent (qu
pourrait nommer le *parallélipipède des forc*
qu'une force quelconque donnée R est toujo
décomposable en trois autres X, Y, Z resp

tivement parallèles à trois lignes données dans l'espace, pourvu que deux de celles-ci ne soient pas parallèles.

Car, en prenant la partie AF pour représenter la quantité de la force R, et menant par le point A d'application trois lignes parallèles aux droites données chacune à chacune, on conduira par le point A trois plans indéfinis XY, XZ, YZ, et par le point F, trois autres plans respectivement parallèles aux premiers; et ces six plans détermineront le parallélipipède dont les trois arêtes contiguës AB, AC, AD, représenteront les trois composantes X, Y, Z.

*Corollaire* II.

**44.** Si le parallélipipède est rectangulaire, on aura, dans le rectangle ADFG, $\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AG}^2$; mais, dans le rectangle ABGC, on a $\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ : donc en substituant cette valeur de $\overline{AG}^2$, on aura

$$\overline{AF}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2;$$

par conséquent,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Ce qui donne $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ pour la

valeur de la résultante en fonction des tro composantes.

**45.** Si l'on veut avoir les trois composant en fonction de la résultante et des angles qu'ell font avec elle, en nommant d'abord $\alpha$ l'ang que la résultante R fait avec la composante X on aura visiblement AF : AB :: 1 : $\cos\alpha$, et, p conséquent,

$$R : X :: 1 : \cos\alpha;$$

d'où l'on tire $X = R\cos\alpha$.

En nommant de même $\beta$ et $\gamma$ les angles q la résultante fait respectivement avec les co posantes Y et Z, on trouvera $Y = R\cos$ $Z = R\cos\gamma$; d'où il suit qu'on trouvera valeurs des trois composantes respectives multipliant la résultante par les cosinus resp tifs des trois angles que sa direction forme a les directions de ces composantes.

*Remarque.*

**46.** Puisqu'on a trouvé $R^2 = X^2 + Y^2 +$ en substituant pour X, Y, Z leurs valeurs r pectives $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$, on aura

$$R^2 = R^2\cos^2\alpha + R^2\cos^2\beta + R^2\cos^2\gamma;$$

ou bien,

$$R^2 = R^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma),$$

d'où

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

relation connue qui a toujours lieu entre les angles que fait une droite avec trois axes rectangulaires dans l'espace.

## SECTION II.

### COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES COUPLES.

**47**. Pour abréger le discours, nous appellerons *couple* l'ensemble de deux forces, telles que P et — P (*fig.* 17), égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point. La perpendiculaire commune AB, menée entre les directions des deux forces, sera *le bras de levier* du couple, et le produit P × AB de l'une des forces par le bras de levier en sera nommé *le moment*. Fig. 17.

Quelle que soit l'action de deux forces telles que P et — P, sur le corps auquel elles sont appliquées, nous avons vu (**27**) que cette action ne peut être contre-balancée par celle d'aucune simple force appliquée comme on voudra au même corps, et que, par conséquent, l'effort d'un couple ne peut être comparé d'aucune manière à une simple force. Pour distinguer cette nouvelle cause de mouvement, qui est en quelque sorte d'une nature particulière, on pourrait lui

Pour démontrer plus facilement cette pr
position, nous la décomposerons en de
autres.

Fig. 18. Soit d'abord le couple (P, — P) (*fig.* 18) a
pliqué perpendiculairement sur AB; prenons c
l'on voudra, dans le plan de ce couple ou da
tout autre plan parallèle, la droite CD, égale
parallèle à AB; joignons AD et BC, qui sero
dans un même plan, et se couperont visiblem
au milieu I de leurs longueurs respectives;
supposons enfin les droites AB et CD liées ent
elles d'une manière invariable.

Si l'on applique sur la ligne CD, parallè
ment aux forces P et — P, deux couples co
traires (P′, — P′), (P″, — P″), égaux entre e
et au couple proposé (P, — P), il est évid
que ces deux couples se détruiront d'eu
mêmes, et que, par conséquent, l'effet
couple (P, — P) ne sera pas changé. Mais, d
autre côté, il est facile de voir que les de
couples (P, — P) et (P″, — P″) se détruis
aussi d'eux-mêmes; car, le point I étant à
fois le milieu des deux lignes AD et BC,
deux forces égales et parallèles P et P″, ap
quées sur AD, donnent une résultante par
tement égale et opposée à la résultante des d
forces — P et — P″, appliquées sur BC. On p
donc supprimer les deux couples (P, —

milieu de son bras de levier, et l'on distinguera facilement le sens des couples en distinguant les couples qui tendent à faire tourner dans un sens, d'avec ceux qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. Mais ne perdons pas de vue qu'il n'y aura réellement aucun point fixe (à moins que nous n'en avertissions expressément), et que l'idée de rotation, qui jusqu'ici est purement accessoire, ne servira qu'à faire image au besoin.

*Translation des couples.*

**48.** Nous avons vu plus haut qu'une force peut être transportée en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit lié au premier d'une manière invariable : voici une proposition analogue pour les couples, qui n'est pas moins remarquable que la première, et dont nous ferons le plus grand usage par la suite.

*Lemme.*

**49.** *Un couple quelconque peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet sur le corps auquel il est appliqué en soit changé, pourvu qu'on suppose le nouveau bras de levier invariablement attaché au premier.*

pour ainsi dire, que le couple primitif qu'o aurait tourné dans son plan, de manière qu son bras de levier AB fût venu dans la positio oblique CD.

De ces deux propositions réunies, on peu conclure qu'un couple quelconque, sans qu son effet soit changé, peut être transporté dar son plan, ou dans tout autre plan parallèle, e telle position qu'on voudra : car on peut d'a bord le transporter parallèlement à ses forc dans le plan donné, de manière que le milie de son bras de levier tombe au point don qu'on voudra, et l'on peut ensuite le tourn autour de ce point, de manière à l'amener da la position donnée; ou, réciproquement, peut le tourner d'abord dans son plan, de m nière que ses forces deviennent parallèles a nouvelles directions qu'on veut leur donner, ensuite le transporter immédiatement dans position donnée.

## *Transformation des couples; leur mesu*

### *Lemme.*

Fig. 20. **50.** *Un couple quelconque* (P, — P) (fig. *appliqué sur un bras de levier* AB, *peut changé en un autre* (Q, — Q) *de même se*

*appliqué sur un bras de levier* BC *différent du premier, pourvu qu'on ait* $P : Q :: BC : AB$, *ou* $P \times AB = Q \times BC$, *c'est-à-dire pourvu que les moments de ces couples soient égaux.*

Prenons, en effet, sur le prolongement de AB une partie quelconque BC, et appliquons sur BC, parallèlement aux forces P et $-P$, deux couples $(Q, -Q)$, $(Q', -Q')$ égaux et contraires : leur effet sera absolument nul, et, par conséquent, celui du couple $(P, -P)$ ne sera pas changé. Mais, d'un autre côté, si l'on suppose que les forces P et Q, et, par conséquent, P et $Q'$, sont en raison inverse des lignes AB et BC, leur résultante, qui est égale à $P + Q'$, passe en B, et détruit évidemment les forces contraires $-P$, $-Q'$ qui s'y trouvent. On peut donc supprimer les quatre forces $P$, $Q'$, $-P$, $-Q'$, et il ne reste plus que le couple $(Q, -Q)$ appliqué sur BC, lequel remplace le couple proposé $(P, -P)$ appliqué sur AB.

*Corollaire.*

**51.** Il n'est pas difficile de conclure de là que les efforts des couples sont proportionnels à leurs moments.

En effet, on peut voir d'abord que deux couples $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ (*fig.* 21), qui agis- Fig. 21.

sent sur les bras de leviers égaux AB, CD, sont entre eux comme les forces P et Q de ces couples : car, si l'on suppose les forces P et Q entre elles comme deux nombres entiers, comme 5 et 3 par exemple, en partageant chaque force P et — P en 5 forces égales, et chaque force Q et — Q en 3 forces égales entre elles et aux premières, on pourra considérer le couple (P, — P) comme la somme de 5 couples égaux et de même sens, appliqués parfaitement l'un sur l'autre, et le couple (Q, — Q) comme la somme de 3 couples égaux entre eux et aux premiers, aussi appliqués l'un sur l'autre. Les intensités des couples (P, — P), (Q, — Q), seront donc entre elles comme 5 à 3, ou comme P à Q. Si les forces P et Q sont incommensurables, on fera le raisonnement connu, etc.

Maintenant soient deux couples quelconques (P, — P), (Q, — Q); soient $p$ le bras de levier du premier, et $q$ le bras de levier du second : le couple (Q, — Q), agissant sur la ligne $q$, est équivalent au couple $\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$, qui agirait sur la ligne $p$; car les moments sont égaux de part et d'autre, le premier étant $Qq$, et le second, $\frac{q}{p}Q.p = Qq$. Ainsi, au lieu des deux couples proposés, on a ces deux-ci (P, — P),

$\left(\frac{q}{p}Q, -\frac{q}{p}Q\right)$ qui ont un même bras de levier $p$. Mais les intensités M et N de ces deux couples sont entre elles comme leurs forces, et, par conséquent, l'on a $M : N :: P : \frac{q}{p}Q$, ou bien $M : N :: Pp : Qq$.

**52.** Puisque deux couples sont entre eux dans le rapport de leurs moments, il s'ensuit que le moment d'un couple est la mesure de son effort ou de son intensité : car si l'on prend pour unité de couple celui qui est composé de deux forces égales à l'unité de force, appliquées sur un bras de levier égal à l'unité de ligne, le couple $(P, -P)$ au bras de levier $p$ contiendra autant de fois l'unité de couple que le moment $P \times p$ contiendra le moment $1 \times 1$, c'est-à-dire contiendra l'unité.

*Remarque.*

**53.** Pour comparer entre elles les grandeurs ou les intensités des couples, on pourrait prendre aussi, au lieu des produits $Pp$, $Qq$ des forces par leurs bras de levier rectangulaires, les produits de ces mêmes forces par des bras de levier obliques sur leurs directions. Mais il faudrait pour tous les couples que les bras de

levier fissent le même angle avec les forces. Il est clair qu'alors les bras de levier obliques seraient tous proportionnels aux bras de levier rectangulaires, et que, par conséquent, les nouveaux moments seraient proportionnels aux premiers.

Nous emploierons quelquefois ces nouveaux moments dans la mesure relative de différents couples; mais nous regarderons toujours les autres comme la mesure absolue de leurs intensités.

## *Composition des couples situés dans un même plan, ou dans des plans parallèles.*

### *Théorème* I.

**54.** *Deux couples situés comme on voudra dans le même plan ou dans des plans parallèles, se composent toujours en un seul, qui est égal à leur somme, s'ils tendent à faire tourner dans le même sens, ou égal à leur différence s'ils tendent à faire tourner en sens contraires.*

En effet, on peut d'abord ramener ces deux couples dans un même plan, ensuite ramener leurs forces au parallélisme, enfin les changer en deux autres équivalents qui auraient un même bras de levier, et alors les appliquer l'un sur l'autre.

Soient P et Q les forces composantes des deux couples, $p$ et $q$ leurs bras de levier respectifs; et soit D la longueur du bras de levier commun aux deux couples transformés. Au lieu du couple $(P, -P)$ au moment $Pp$, on substituera le couple équivalent $(P', -P')$, dont le moment $P'D$ serait égal à $Pp$. On substituera de même, à la place du couple $(Q, -Q)$ au moment $Qq$, le couple $(Q', -Q')$ au moment $Q'D = Qq$; et ces deux couples transformés étant appliqués l'un sur l'autre, sur le même bras de levier D, on aura un couple unique résultant $[(P' + Q'), -(P' + Q')]$, dont le moment sera

$$(P' + Q')D, \quad \text{ou} \quad P'D + Q'D = Pp + Qq.$$

Ainsi, le moment résultant sera égal à la somme des moments composants, ou bien à leur différence, selon que les forces $P'$ et $Q'$, qui agiront à la même extrémité du bras de levier D, seront de même sens, ou de sens contraires.

*Corollaire.*

On voit donc, en combinant ainsi les couples deux à deux, que tant de couples qu'on voudra, situés d'une manière quelconque dans un même plan ou dans des plans parallèles, se

réduiront toujours à un seul, égal à la somn de ceux qui tendent à faire tourner dans ı sens, moins la somme de ceux qui tendent faire tourner dans le sens contraire.

Et réciproquement, on pourra décompos un couple donné en autant d'autres qu'on vo dra, situés dans le même plan ou dans d plans parallèles. On pourra même prendre volonté tous ces couples, hors un seul; car suffira que la somme de ceux qui agissent da le même sens, moins la somme de ceux q agissent en sens contraire, soit égale au cou proposé.

## *Composition des couples situés dans a plans quelconques.*

### *Théorème* II.

**55.** *Deux couples situés comme on vou dans deux plans qui se coupent sous un angle qu conque se composent toujours en un seul.*

*Et si l'on représente les moments de ces cc ples par les longueurs respectives de deux dro tirées sous un angle égal à celui des deux plans, qu'on achève le parallélogramme, le moment couple résultant sera représenté par la diagon de ce parallélogramme, et le plan de ce cou partagera l'angle que font entre eux les plans*

*couples composants, comme la diagonale du parallélogramme partage l'angle que font les deux côtés adjacents.*

Soient, en effet, les deux couples proposés, situés dans les deux plans AGM, AGN (*fig.* 22), qui se rencontrent suivant AG; et supposons qu'on ait d'abord changé ces deux couples en deux autres respectivement équivalents, qui auraient un même bras de levier. Fig. 22.

En quelque lieu que soit situé le couple (P, — P) dans le plan AGM, on pourra le ramener dans ce plan à angle droit sur l'intersection AG, de manière que son bras de levier AB tombe sur l'intersection AG (49). De même, en quelque lieu que soit situé le couple (Q, — Q) dans le plan AGN, on pourra le ramener aussi à angle droit sur la même intersection, et de manière que son bras de levier, égal au premier, coïncide avec lui en AB.

Alors les deux forces P et Q appliquées en A, se composeront en une seule R appliquée au même point A, et représentée par la diagonale AR du parallélogramme construit sur les deux lignes AP, AQ, qui représentent les forces P et Q. Les deux forces — P, — Q, appliquées en B, se composeront aussi en une seule — R appliquée en B, parfaitement égale, parallèle et contraire à la première; et l'on aura, au lieu

des deux couples (P, — P), (Q, — Q), le coup unique (R, — R) appliqué sur le même bras ( levier AB.

Puisque ces trois couples ont un même br de levier, leurs moments respectifs sont pr portionnels aux valeurs des trois forces P, Q, ] Donc, si l'on représente les moments des de couples composants par les deux lignes AP, A qui leur sont proportionnelles, le moment couple résultant sera représenté par la diag nale AR du parallélogramme APRQ constr sur ces lignes. Or il est visible que les ang formés par les trois lignes AP, AQ, AR, n surent les angles que font les trois plans; don plan du couple résultant partage l'angle des d autres plans, comme la diagonale AR part l'angle PAQ des deux côtés adjacents AP, A Donc, etc.

*Corollaire.*

56. On pourra donc toujours réduire à seul tant de couples que l'on voudra, appliq à un corps d'une manière quelconque dans l pace; car, en les composant successivement d à deux, comme nous venons de faire, on a vera nécessairement à un couple unique ( on connaîtra le plan et la grandeur, et qui équivalent à tous les autres.

Réciproquement, on peut toujours décomposer un couple en deux autres situés dans deux plans donnés, pourvu que ces plans et celui du couple proposé se rencontrent suivant une même droite (ou suivant des droites parallèles; car, en transportant le plan de l'un de ces couples parallèlement à lui-même, ce qui est permis (49), on rassemblerait leurs trois intersections parallèles en une seule).

*Remarque* I.

57. Pour opérer cette décomposition, on n'aura qu'à suivre dans l'ordre inverse le procédé que nous venons de donner pour la composition de deux couples; ou bien l'on emploiera la méthode suivante, qui est très-simple, et dont nous nous servirons quelquefois.

Soit AZ (*fig.* 23) la commune intersection des trois plans: menons à volonté un plan YAX qui les coupe suivant les trois lignes respectives AY, AV, AX; et soit ZAV le plan du couple proposé. Fig. 23.

En quelque lieu que ce couple (P, — P) soit situé dans le plan ZAV, on peut le placer de manière que ses forces soient parallèles à l'intersection AZ, et que la direction de l'une d'elles, comme de la force — P, coïncide avec

cette même intersection. Alors la direction d
l'autre force P rencontrera quelque part en l
la droite AV, et l'on aura le couple (P, — P
appliqué d'une manière quelconque sur AB
comme on le voit dans la figure. Maintenan
formons, suivant les directions AY, AX, ave
AB comme diagonale, le parallélogramm
BCAD ; et à l'un des angles C ou D, en D pa
exemple, appliquons deux forces contraire
P′, — P′, égales et parallèles aux forces P et —
du couple proposé. L'effet de ce couple ne ser
pas changé. Mais actuellement, au lieu d
couple (P, — P) appliqué sur la diagona
AB, on peut en considérer deux autres : l'u
(P′, — P) appliqué sur le côté AD dans l'u
des plans donnés ZAY ; l'autre (P, — P′) ap
pliqué sur BD parallèlement à l'autre pla
ZAX. Or ce couple peut être transporté p
rallèlement à lui-même dans ce plan ZAX, s
le côté AC = BD; et l'on aura alors, au lie
du couple (P, — P) appliqué sur la diagona
AB, deux couples (P′, — P), (P, — P′), com
posés de forces égales et parallèles aux pr
mières, appliqués dans les deux plans donn
sur les côtés AD, AC.

*Remarque* II.

58. Si l'on supposait que le plan YAX f

mené perpendiculairement à la commune intersection AZ des plans des trois couples, les forces de ces couples seraient perpendiculaires aux lignes AY, AV, AX; et comme ces forces sont égales, les moments des couples seraient proportionnels à leurs bras de levier AD, AB, AC; et, d'après ce que nous venons de dire, on retomberait sur le théorème précédent (**55**): ce qui fournit, comme on voit, une nouvelle démonstration de ce théorème.

*Remarque* III.

**59.** Cette double démonstration vient de la double manière dont on peut transformer les deux couples avant de les composer. Dans la première, on commence par leur donner un même bras de levier avec des forces différentes; dans la seconde, on leur donne les mêmes forces avec des bras différents.

Il y aurait une troisième démonstration qui se ferait sans rien changer aux deux couples proposés. Car soient (P, — P) et (Q, — Q, (*fig.* 23 *bis*), deux couples appliqués perpendiculairement au plan du triangle ABC, sur les bras respectifs AB, AC; et supposons que les deux forces P et Q qui tirent en B et C soient de même sens. Il est clair que ces deux forces se composent en une seule P + Q de Fig. 23 *bis*.

même sens, et appliquée au point $g$ qui divise la base BC dans la raison réciproque de P à Q. Les deux forces $-$ P et $-$ Q qui tirent en A se composent de même en une seule $-(P+Q)$ appliquée au point A; et si l'on fait, pour abréger, $P+Q=R$, on a le couple résultant $(R, -R)$ appliqué sur A$g$ dans un plan perpendiculaire au triangle ABC.

Maintenant, que du point $g$ on mène deux parallèles aux côtés AB et AC, et qu'on achève ainsi le parallélogramme A$lgm$; il s'agirait de prouver que les moments de nos trois couples, savoir,

$$P \times AB, \quad Q \times AC, \quad R \times Ag,$$

sont entre eux comme les côtés A$l$, A$m$ et la diagonale A$g$ de ce parallélogramme. Or c'est ce qui est facile; car en mettant, au lieu des forces P, Q, R, les trois lignes C$g$, B$g$, BC, qui leur sont proportionnelles, on voit que ces moments sont entre eux comme les trois produits

$$Cg \times AB, \quad Bg \times AC, \quad BC \times Ag.$$

Mais les triangles semblables donnent

$$Cg \times AB = BC \times Al, \text{ et } Bg \times AC = BC \times Am.$$

Substituant ces deux nouveaux produits à la place des deux premiers, et supprimant partout

le facteur commun BC, on a les trois moments dont il s'agit dans la proportion des simples lignes A$l$, A$m$, A$g$; ce qu'il fallait démontrer.

On peut varier encore ces démonstrations; mais il y a une manière bien plus simple de présenter la composition des couples, comme nous allons le voir dans l'article suivant.

## *Expression plus simple des théorèmes qui concernent la composition des couples.*

**60.** Au lieu de déterminer la position d'un couple par celle de son plan, on peut la déterminer par la direction d'une droite quelconque perpendiculaire à ce plan, et que l'on pourra nommer l'*axe* du couple. Puisqu'un couple peut être supposé appliqué où l'on voudra dans son plan ou dans tout autre plan parallèle (**49**), il est visible que l'on connaîtra la position d'un couple dans l'espace, lorsque l'on connaîtra la direction de son axe: car, en élevant où l'on voudra sur cet axe un plan perpendiculaire, on pourra prendre ce plan pour celui du couple proposé.

Ainsi la position de différents couples parallèles peut être donnée par une seule droite perpendiculaire à tous ces couples, et qui en sera, pour ainsi dire, l'axe commun.

Si les couples sont situés dans des pl quelconques, on supposera d'abord, pour p de clarté, qu'ils soient transportés dans plans respectivement parallèles, tous cond par un seul et même point A, pris à volo dans l'espace, et qui deviendra le comm centre de tous ces couples : et si l'on prend point pour l'origine des perpendiculaires qu élève à ces plans respectifs, la position des férents couples se trouvera donnée par c d'autant de droites partant d'un seul point faisant entre elles les mêmes angles que plans des couples proposés.

De plus, si, à partir de ce point A, on p sur ces droites des longueurs AL, AM, AN, proportionnelles aux moments respectifs de couples, que je désigne ici par les simples tres L, M, N, etc., chacune de ces lignes minées, telle que AL, suffira pour représe à la fois l'axe et la grandeur du couple I lui correspond.

Enfin, si l'on veut que la même ligne puisse encore indiquer le *sens* dans leque couple agit (ce qui est nécessaire pour ach la détermination complète du couple), i aura qu'à faire une convention toute blable à celle qui regarde les simples fo Or, pour une simple force P appliquée

et qu'on représente par une certaine ligne AP, cette convention consiste, comme on l'a dit (**11**), en ce que l'action de cette force a toujours lieu de A vers P, ou que la force tire de A en P. Ici, pour un couple L appliqué autour du centre A, et dont je représente l'axe et la grandeur par la ligne terminée AL, je supposerai toujours que le sens du couple ou de la rotation qu'il tend à produire est tel que, si l'on se plaçait au point L, considéré comme le nord, pour regarder devant soi le point A, considéré comme le midi, on verrait la rotation se faire de l'orient à l'occident, ou de la gauche à la droite, comme se fait à nos yeux le mouvement du soleil. C'est d'ailleurs le sens ordinaire dont la main fait tourner la plupart des instruments de rotation; et c'est dans ce sens convenu qu'agira pour nous le couple représenté par la ligne AL.

On peut adopter, si l'on veut, la convention contraire, pourvu qu'on s'y conforme avec le même soin pour tous les couples dont il s'agit dans une même figure, ou dans l'énoncé d'une même proposition.

Au reste, on voit qu'une des deux conventions, comme la première, nous suffit; car, s'il fallait indiquer dans la figure un couple L′ contraire à L, on le représenterait de même

par une ligne AL′, mais portée de l'autre côté du point A sur le prolongement de la première. Il est clair, en effet, que ce second couple qui, vu du point L′, ferait tourner dans le sens convenu, c'est-à-dire de gauche à droite, étant vu du point L, ferait tourner de droite à gauche, et serait réellement contraire au premier.

Par cette manière de déterminer les couples et d'en indiquer les sens simultanés, on voit donc que la représentation géométrique de tant de couples qu'on voudra, appliqués sur un corps dans des plans quelconques, devient parfaitement la même que celle d'autant de simples forces appliquées sur un point; et l'on va prouver tout à l'heure que leur composition peut s'exprimer par des lois toutes semblables. Tout se réduit, en effet, à la démonstration du théorème suivant, qui remplace le théorème II, et qu'on peut très-bien nommer le *parallélogramme des couples.*

*Théorème.*

**61**. *Si deux couples* L *et* M *sont représentés, pour leurs axes et pour leurs grandeurs, par les deux côtés* AL *et* AM *d'un parallélogramme* ALGM, *ces deux couples se composent en un seul* G *re-*

*présenté, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale* AG *de ce parallélogramme.*

En effet, que du point A et dans le plan du parallélogramme ALMG (*fig.* 24), on mène Fig. 24. deux lignes *ll'*, *mm'* perpendiculaires et proportionnelles aux deux côtés respectifs AL et AM, et qui soient toutes deux coupées par leur milieu au point A. Si l'on achève les parallélogrammes A*lgm*, A*l'g'm'*, il est clair que ces parallélogrammes seront égaux entre eux, et semblables au premier ALGM, et que, par conséquent, la ligne *gg'* sera aussi perpendiculaire et proportionnelle à la diagonale AG, et coupée en son milieu au point A.

Maintenant, que sur les lignes *ll'*, *mm'*, comme bras de levier, et dans des plans perpendiculaires à la figure, on applique deux couples composés de forces égales, le premier (P, — P) sur la ligne *ll'*, et le second (P, — P) sur *mm'*; et supposons, pour nous conformer à la convention ci-dessus (**60**), que ces couples tendent tous deux à faire tourner de gauche à droite quand on les regarde l'un après l'autre des points L et M. Il est évident que ces deux couples peuvent être pris pour ceux que les côtés AL et AM représentent: car, 1° ils sont situés dans des plans perpendiculaires à ces côtés; 2° ils ont des moments proportionnels

aux mêmes côtés; et 3° leurs sens simultan sont conformes à la convention établie. ( il est aisé de voir que ces deux couples se cor posent en un seul, représenté de même par diagonale AG. En effet, les deux forces P et appliquées en $l$ et $m$ se composent en une seu 2 P parallèle, et de même sens, appliquée point $c$, qui est le milieu de $lm$, et, par cons quent, le milieu de A$g$. De même les de forces — P et — P, en $l'$ et $m'$, se compose en une seule — 2 P appliquée en $c'$, milieu A$g'$; et l'on a le couple résultant (2 P, — 2 appliqué sur la ligne $cc'$, ou simplement, couple (P, — P) appliqué sur la ligne doul $gg'$. Or ce couple est évidemment perpen culaire et proportionnel à la diagonale AG, fait aussi tourner de gauche à droite quand le regarde du point G. Donc, etc.

Nous aurions pu tirer ce théorème de l'u des démonstrations qui précèdent, mais n avons préféré d'en faire ici la démonstrat immédiate, et sur une nouvelle figure, où l vît très-clairement les sens relatifs que doiv avoir ensemble les trois couples que l'on considère.

*Remarque* I.

**62.** On voit ici, par un raisonnement tout à fait semblable à celui du n° **37**, que si deux couples agissent dans des plans qui se coupent, ou qui ne sont point parallèles, ils ne peuvent jamais donner un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls tous les deux à la fois.

*Remarque* II.

**63.** Lorsque les plans des couples composants sont rectangulaires entre eux, les deux axes AL et AM sont aussi rectangulaires, et dans le rectangle ALGM, on a $\overline{AG}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AM}^2$; de plus, si l'on nomme $\alpha$ et $\beta$ les angles que fait la diagonale AG avec les deux côtés adjacents AL, AM, on a

$$AL = AG.\cos\alpha, \quad AM = AG.\cos\beta.$$

Donc, en désignant simplement les trois moments respectifs par les lettres L, M, G, on a, pour le moment G, $G^2 = L^2 + M^2$, d'où

$$G = \sqrt{L^2 + M^2},$$

et, pour les angles $\alpha$ et $\beta$ que son axe fait avec les axes des deux autres, $L = G \cos\alpha$,

$M = G \cos \beta$; d'où

$$\cos \alpha = \frac{L}{G}, \quad \cos \beta = \frac{M}{G}.$$

*Remarque* III.

En général, si l'on nomme $\varphi$ l'angle que fon entre eux les deux couples composants, ou leurs axes AL et AM, on aura dans le parallélogramme ALGM,

$$\overline{AG}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{AM}^2 + 2\overline{AL} \times \overline{AM}.\cos \varphi,$$

et, par conséquent,

$$G^2 = L^2 + M^2 + 2LM \cos \varphi;$$

ce qui donne le couple résultant G par le couples composants L et M, et leur inclinaisoı mutuelle $\varphi$.

Si l'angle $\varphi$ est nul, on a $\cos \varphi = 1$, et i vient

$$G = L + M;$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a déjà vu : ca les deux couples sont alors dans le même plai et de même sens, et ils se composent en un seu égal à leur somme.

Si l'angle $\varphi$ est égal à deux droits, on : $\cos \varphi = -1$, et il vient $G = L - M$; ce qui doi être, car les deux couples sont alors de sen

contraires, et ils se composent en un seul égal à leur différence.

Lorsque $\varphi$ est un angle droit, $\cos\varphi = 0$, et l'on a $G = \sqrt{L^2 + M^2}$, comme ci-dessus.

*Remarque* IV.

De la composition de deux couples, il est bien facile de s'élever à la composition de tant de couples qu'on voudra, et il est évident qu'on aura des théorèmes tout semblables à ceux qui regardent les simples forces autour d'un point : cependant je crois devoir énoncer et démontrer comme théorème le corollaire suivant, à cause du grand usage qu'on en peut faire en Mécanique.

*Théorème.*

**64.** *Trois couples représentés, pour leurs axes et pour leurs grandeurs, par les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède, se composent toujours en un seul représenté, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale de ce parallélipipède.*

Soient, en effet, A...G (*fig.* 25) le parallélipipède; AL, AM, AN, les côtés qui représentent à la fois les axes et les moments des trois couples. Fig. 25.

Les deux couples représentés par les deux côtés AL, AM du parallélogramme ALOM, se

composeront en un seul représenté, pour son axe et pour sa grandeur, par la diagonale AO de ce parallélogramme. Maintenant ce couple, et le troisième représenté par AN, se composeront en un seul représenté par la diagonale AG du parallélogramme ANGO. Or cette diagonale est en même temps celle du parallélipipède; donc, etc.

**65.** On voit encore ici, par le même raisonnement que celui du n° **42**, que si trois couples agissent dans trois plans qui forment un angle solide ou qui se coupent en un point unique, ils ne peuvent jamais avoir un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls en même temps tous les trois.

*Remarque.*

**66.** Lorsque le parallélipipède est rectangulaire, en nommant L, M, N les moments composants, et G le moment résultant, on a manifestement $G^2 = L^2 + M^2 + N^2$.

En désignant par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les trois angles que la diagonale, ou plutôt que l'axe du couple résultant fait avec les trois axes des couples composants, on a

$$L = G\cos\lambda, \quad M = G\cos\mu, \quad N = G\cos\nu;$$

d'où

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Donc, s'il s'agit de calculer le moment résultant G de trois moments L, M, N, dont les axes sont rectangulaires, on aura pour sa valeur, $G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, et pour les angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$, que son axe fait avec les trois axes des moments composants,

$$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

S'il s'agit, au contraire, de décomposer un couple G en trois autres, situés dans trois plans rectangulaires entre eux, ou dont les trois axes soient rectangulaires, on aura, pour les valeurs respectives des moments composants,

$$L = G\cos\lambda, \quad M = G\cos\mu, \quad N = G\cos\nu;$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant les trois angles que l'axe du couple donné fait avec ceux des couples composants cherchés.

**67.** Au reste, nous ne nous arrêterons pas sur ces détails; nous remarquerons seulement

qu'entre les sept quantités L, M, N, G, cos $\lambda$, cos $\mu$, cos $\nu$, on a quatre équations qui sont

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2,\ L = G\cos\lambda,\ M = G\cos\mu$$

$N = G\cos\nu$, au moyen desquelles, connaissant d'ailleurs trois de ces quantités, on pourra déterminer les quatre autres.

Il faut pourtant excepter le cas où l'on ne connaîtrait que les trois angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$; alors on ne pourrait obtenir que les rapports des moments L, M, N, G.

## CONCLUSION GÉNÉRALE DE CE CHAPITRE.

### *Composition des forces dirigées comme on voudra dans l'espace.*

**68.** Soient tant de forces que l'on voudra P, P$_{,}$, P$_{,,}$, etc., appliquées d'une manière quelconque dans l'espace, à un corps ou système libre.

Je considère d'abord l'une d'elles, la force
Fig. 26. (*fig.* 26) par exemple, qui est appliquée au point B. Ensuite, au point A, arbitrairement pris dans ce corps, ou au dehors (pourvu qu'on l'y suppose invariablement fixé), j'applique deux forces contraires P′, — P′, égales et parallèles à la force P. Il est clair que je n'ai rien changé à l'état du système. Mais je puis cons

dérer maintenant, au lieu de la force P appliquée en B, la force P′ appliquée en A; et le couple (P, — P′) agissant sur la droite AB. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan quelconque parallèle au sien, il ne restera au point A que la force P′ égale et parallèle à la force P, et qui n'est en quelque sorte que cette même force P qu'on aurait transportée parallèlement à elle-même de B en A.

Si l'on fait la même transformation pour toutes les forces du système à l'égard du même point A, il est manifeste que toutes ces forces viendront s'y réunir parallèlement à elles-mêmes, mais qu'il y aura de plus, dans le système, autant de couples appliqués provenant de chaque transformation. Or toutes les forces appliquées au point A se composeront en une seule R, et tous les couples en un seul couple (S, — S) (*fig.* 27) appliqué sur une certaine droite BC. Fig. 27.

Ce qui nous apprend que *tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un corps, peuvent toujours se réduire à une seule force qui passe par un point donné à volonté, et à un seul couple, dont le plan sera, en général, incliné à la direction de la force.*

Observons, sur-le-champ, que la quantité, la direction et le sens de la résultante R seront

toujours les mêmes, en quelque lieu qu'on ait pris le point A. En variant la position de ce point, la résultante R ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en différents lieux de l'espace; mais le plan et la grandeur du couple résultant (S, — S) changeront nécessairement.

Or, parmi cette infinité de réductions relatives à tous les points A de l'espace, il y en a une distinguée de toutes les autres, en ce que le plan du couple résultant est perpendiculaire à la direction de la résultante. C'est ce qu'on peut démontrer ici d'une manière très-prompte. Car tout étant déjà réduit à la seule force R et au seule couple (S, — S) par rapport à un point connu A, imaginez qu'on décompose ce couple (S, — S) en deux autres, l'un (T, — T) qui tombe dans un plan perpendiculaire à la direction de la résultante, et l'autre (V, — V) dans un plan qui passe par cette direction AR. Et dans ce plan, où se trouvent à la fois le couple (V, — V) et la force R, on transporte cette force parallèlement à elle-même de A en O d'un tel côté, et à une telle distance AO, que le couple (R, — R), né de cette translation, soit égal et contraire au couple (V, — V) et le détruise, il ne restera plus que la seule force R appliquée au nouveau point O, avec le seul couple (T, — T) qui est dans un plan perpen

diculaire à la direction de cette force. Ainsi, *tant de forces qu'on voudra sont toujours réductibles à une seule force et à un seul couple dont le plan est perpendiculaire à la direction de la force :* de sorte qu'il y a toujours dans l'espace une certaine droite déterminée OR qui peut servir à représenter tout à la fois la direction de la résultante et l'axe du couple résultant.

Cette réduction est unique : je veux dire qu'il n'y a dans l'espace aucun autre lieu où l'on puisse trouver le couple résultant perpendiculaire à la résultante. Car maintenant, de quelque côté qu'on veuille transporter la force R hors de sa position actuelle OR, elle produira un couple (R, — R) perpendiculaire au couple (T, — T), et ces deux couples, étant composés en un seul, donneront le nouveau couple résultant nécessairement incliné au couple (T, — T); et même toujours plus grand, puisque les deux composants sont rectangulaires entre eux. D'où l'on voit, non-seulement que le couple (T, — T) est le seul qui puisse être perpendiculaire à la direction de la résultante, mais qu'il est encore le plus petit de tous les couples résultants qu'on peut trouver par rapport à tous les points de l'espace. On voit en même temps que, pour des points pris autour de OR, à égales distances de cette droite, les couples résultants ont des va-

leurs égales, et sont dans des plans différents, mais également inclinés à cet axe OR, qu'on peut ainsi nommer l'*axe central* des couples du système. En s'éloignant de cet axe, on trouve des couples toujours plus grands et qui croissent sans bornes; mais ils ont tous cette commune propriété, que chacun d'eux, *estimé* sur le plan perpendiculaire à la direction constante de la force R, donne le même couple (T, — T) : d'où l'on voit que la valeur de ce couple *minimum* s'obtient tout de suite en prenant un couple résultant quelconque (S, — S) et le multipliant par le cosinus de son inclinaison au plan dont il s'agit.

Je ne présente, en passant, cet axe *central* où se fait une réduction si lumineuse de toutes les forces du système, que pour éclairer à la fois toutes les autres réductions équivalentes, et les grouper, pour ainsi dire, dans un seul tableau où l'on en voit d'un coup d'œil l'ordre et la dépendance mutuelle.

On trouvera cette théorie plus développée dans notre Mémoire sur les *Moments et sur les Aires;* mais je dois me borner ici aux corollaires généraux qui importent le plus à nos Éléments de Statique.

*Corollaire* I,

*Qui contient les lois de l'équilibre de tout système libre.*

**69.** Un couple ne pouvant jamais être tenu en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace, il résulte de ce que nous venons de dire, qu'il ne pourra jamais y avoir équilibre dans le système, à moins que la résultante R des forces ne soit nulle d'elle-même, et que le moment du couple résultant (S, — S) ne soit aussi nul de lui-même.

Ainsi, *toutes les forces appliquées au système, étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque du système ou de l'espace, doivent s'y faire équilibre entre elles; et tous les couples qu'elles produisent en se transportant en ce point doivent aussi se faire équilibre entre eux.*

*Remarque.*

**70.** Telles sont, pour un système libre quelconque, de forme invariable, les deux conditions d'équilibre nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire sans lesquelles l'équilibre ne pourra subsister, et telles qu'il aura manifestement lieu, si elles sont remplies.

Pour développer ces deux conditions, il faudra remonter à la valeur de la résultante R,

et à la valeur du couple résultant (S, — S) e conservant les lois qui lient la résultante à se composantes, et le couple résultant aux couple composants, faire ensuite la force R et le coupl (S, — S) tous deux nuls, et voir quelles relation cela établit entre les forces primitives appli quées au système. On obtiendra de cette ma nière les conditions de l'équilibre, exprimé au moyen des seules forces données immédi tement par l'état de la question; ce qui est l solution du problème que nous avions en vue.

Mais tous ces développements qui, d'apr les principes posés ci-dessus, ne sont plus qu'u affaire de géométrie et de calcul, feront l'obj du chapitre suivant.

*Corollaire* II,

*Qui contient les conditions nécessaires pour q toutes les forces appliquées au système aient u résultante unique, lorsqu'elles ne se font p équilibre.*

**71.** Toutes les forces appliquées au systè étant ramenées, ainsi que nous venons de voir, à une seule force et à un couple, suppos que cette force R et le couple (S, — S) puiss se réduire à une seule force, ou, si l'on ve qu'une force unique R′ fasse équilibre au cou (S, — S) et à la force R.

Puisqu'il y a équilibre entre les deux forces R, R′, et le couple (S, — S), je dis que les deux forces R et R′ doivent former un couple contraire et équivalent au couple (S, — S), et situé dans le même plan, ou dans un plan parallèle, ce qui est ici la même chose.

Car il ne peut arriver que trois cas: ou les deux forces R et R′ seront susceptibles de se réduire à une seule, et alors cette force ne pourra faire équilibre au couple (S, — S); ou elles se réduiront à une seule avec un couple, et alors ce couple et le proposé (S, — S) se réduiront à un seul, qui ne pourra pas être en équilibre avec la force; ou bien enfin elles se réduiront à un seul couple, et c'est le seul cas qui puisse arriver.

Il faut donc au moins que les deux forces R et R′ forment ensemble un couple. Mais pour que ce couple fasse équilibre au couple (S, — S), il est nécessaire qu'il soit situé dans le même plan ou dans un plan parallèle, sans quoi ces deux couples se composeraient toujours en un seul qui ne pourrait jamais être nul (**62**), et il n'y aurait pas équilibre. Donc la direction de la résultante R doit être parallèle au plan du couple résultant (S, — S); et par conséquent, *toutes les forces appliquées au système ne pourront jamais se réduire à une seule, à moins que la ré-*

*sultante de ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un même point, n'ait une direction parallèle au plan du couple résultant, et cela, en quelque lieu de l'espace qu'on ait pris d'abord le point où l'on a transporté toutes les forces.*

Cette condition est nécessaire, et il est clair qu'elle suffit en général; car, à moins que la résultante R ne soit nulle, on sera toujours maître d'appliquer au système une force R qui soit égale, parallèle et opposée à la force R, et qui forme avec elle un couple (R, — R) d'un sens contraire à celui du couple (S, — S) et d'un moment équivalent. Cette force estimée en sens contraire sera la résultante générale.

Au reste, on pourra prendre immédiatement cette résultante: car si la force R appliquée en A est parallèle au plan du couple (S, — S), on pourra amener ce couple dans un même plan avec la force R, et alors les trois forces R, et — S, étant dans le même plan, se composeront toujours en une seule égale et parallèle à R, et qui sera la résultante unique de toutes les forces.

**72.** Dans le cas où la force R est égale à zéro il n'y a point de résultante unique. Car toutes les forces du système sont réduites au se

couple (S, — S) qui ne peut jamais se réduire à une seule force. Ainsi, à la condition précédente, qui exige que la force R soit parallèle au plan du couple (S, — S), il faut joindre encore celle-ci, comme condition particulière : *que la force* R *ne soit pas égale à zéro* (à moins qu'il n'y ait équilibre, auquel cas la force résultante et le couple résultant étant tous deux nuls, on pourrait dire qu'il y a une résultante unique qui est zéro, et qui a d'ailleurs telle direction et telle position qu'on veut dans l'espace; mais nous avons exclu le cas de l'équilibre).

*Remarque* I.

**73.** Lorsque le couple résultant (S, — S) (*fig.* 28) et la force R ne sont pas dans des plans parallèles, il n'y a jamais de résultante unique. Seulement, en transportant le couple (S, — S) parallèlement à son plan, on peut amener l'extrémité B ou C de son bras de levier sur le point A, et alors les deux forces R et S appliquées en A se composent en une seule T; et toutes les forces du système sont réduites à deux autres T et — S non situées dans le même plan. Fig. 28.

Ce qui nous fait voir d'abord que *tant de forces que l'on voudra, dirigées arbitrairement dans l'espace, peuvent toujours se réduire à deux au plus, non situées dans le même plan.*

Mais il est clair que cette réduction peut avoir lieu d'une infinité de manières, même sans déplacer le point A où l'on rassemble toutes les forces; car le couple (S, — S) pourrait être changé en une infinité d'autres équivalents, et de plus tourné sur son axe dans une position quelconque, et l'on arriverait ainsi à une infinité de systèmes différents de deux réduites non situées dans le même plan.

A la vérité, on pourrait choisir, entre ces systèmes, celui où l'une des forces serait perpendiculaire au plan du couple, et l'autre dirigée dans ce même plan; car imaginez la résultante R décomposée en deux forces, l'une V perpendiculaire, l'autre U parallèle au plan du couple (S, — S) : la force U et le couple parallèle (S, — S) se réduiront toujours à une seule U′ égale et parallèle à U; et toutes les forces appliquées seront réduites à deux autres V et U′ de directions rectangulaires dans l'espace. Ainsi, *des forces quelconques peuvent se réduire à deux forces de directions perpendiculaires entre elles, et dont l'une passe en un point* A *donné à volonté.* Mais cette réduction elle-même, qui souffre d'ailleurs une exception, n'a guère plus d'utilité que la précédente, et nous ne nous arrêterons pas davantage.

*Remarque* II.

**74.** La seule conséquence qu'il soit bon de remarquer est cette autre proposition réciproque : que *deux forces non situées dans le même plan ne peuvent jamais avoir de résultante unique.*

Et, en effet, on peut toujours supposer que ces deux forces proviennent d'une autre force, et d'un couple qui ne lui était pas parallèle.

Mais si l'on veut voir la chose directement, soit AB (*fig.* 29) la commune perpendiculaire aux directions des deux forces P et Q non situées dans le même plan, et dont aucune n'est supposée nulle. Je transporte P parallèlement à elle-même de B en A, et j'ai deux forces P′ et Q appliquées au même point A, et un couple (P, — P′) appliqué sur AB. Or, au point A, les forces P′ et Q qui, par hypothèse, font entre elles un certain angle QAP′, se composent en une seule R dirigée dans l'intérieur de cet angle. Mais cette force R ne peut être parallèle au plan du couple (P, — P′), puisqu'elle fait avec ce plan un angle BAP′ qui ne peut jamais être nul, à moins que Q ne soit nulle, ce qui est contre la supposition. Donc (**71**) les deux forces P et Q non situées dans le même plan ne peuvent jamais avoir de résultante unique ; propo- Fig. 29.

sition qu'on regarde ordinairement comme évi dente, mais qui avait besoin d'être démontrée

*Remarque* III.

**75.** C'est, au reste, le seul cas général o l'on puisse assurer que des forces ne sont pa réductibles à une seule; car, dès que l'on con sidère seulement trois forces, il résulte de notr théorie qu'elles peuvent avoir une résultant unique, quand bien même il n'y aurait aucun rencontre entre les directions de ces trois forc dans l'espace.

Soient, en effet, trois forces P, Q, R, que j suppose, deux à deux, non situées dans l même plan, ou même telles que, s'il y en ava deux dans un même plan, l'autre ne fût en mêm plan ni avec la première, ni avec la seconde.

Je choisis deux de ces forces P et Q qui n soient pas situées dans un même plan, et je l imagine transportées en un même point A pr sur la direction de la troisième force R. C deux forces P et Q viennent s'y composer e une seule V, et donnent deux couples qui composent en un seul (S, — S); et le plan c ce couple ne passe point par la direction A de la force V (**74**).

Cela posé, si la résultante des deux forc V et R, appliquées en A, se trouvait dans

plan du couple (S, — S) qui passe au même point, les trois forces proposées P, Q, R seraient réductibles à une seule (**71**). Or, sans changer la direction de la force R, on peut disposer du sens et de la grandeur de cette force de manière que la résultante de V et R tourne autour du point A dans le plan de ces deux forces, et se dirige suivant l'intersection de ce plan avec celui du couple (S, — S), et tombe ainsi dans le plan même de ce couple. Donc, en prenant convenablement la grandeur et le sens de l'une des trois forces, P, Q, R, sans rien changer à leurs positions mutuelles, on peut en général rendre ces trois forces réductibles à une seule.

Je dis *en général*, parce qu'il y a un cas particulier où la chose ne pourrait avoir lieu en supposant qu'il y eût un certain rapport donné entre P et Q, et qu'on s'astreignît à ne faire varier que la quantité de la troisième force R : car, si, par ce rapport de P à Q, il arrivait que l'intersection du plan VAR avec le plan du couple fût la direction même AR de cette troisième force, on ne pourrait faire prendre à la résultante de V et R la direction AR, sans faire la composante R infinie, ce qui est impossible.

Mais, dans ce cas particulier, que l'on commence par changer le rapport des deux forces

P et Q, ou simplement le sens de l'une d'elles, et le couple (S, — S) qui résultera de leur translation au point A ne passera plus par la direction de la troisième force R : car, si le plan de ce couple passait encore par la même droite AR, il s'ensuivrait que AR est la commune section des deux plans où sont situés les couples qui composent (S, — S), et qu'ainsi la force R est à la fois dans un même plan avec P, et dans un même plan avec Q; ce qui est contre l'hypothèse.

Ainsi, *quand de trois forces* P, Q, R, *on n'en peut trouver tout au plus que deux qui soient situées en même plan, il est toujours possible de rendre ces trois forces réductibles à une seule, sans rien changer à leurs directions dans l'espace.*

Le seul cas où l'on puisse dire de trois forces que leur position seule les rend toujours irréductibles, est celui où, en regardant ces forces deux à deux, on ne trouve qu'une combinaison qui présente deux forces non situées en même plan. Dans une telle position, quels que soient les rapports de grandeur qu'on veuille donner à ces forces, on ne les rendra jamais capables de se réduire à une seule.

*Remarque* IV.

**76**. Comme il paraît incontestable qu'un couple ne peut être en équilibre autour d'un

point fixe, par exemple autour du milieu de son bras de levier, remarquons cette différence entre l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un corps assujetti à tourner autour d'un point fixe, et l'équilibre de plusieurs couples qui seraient appliqués au même corps.

Dans le premier cas, il n'est pas nécessaire que les forces aient une résultante nulle d'elle-même; il suffit qu'elles aient une résultante qui passe par le point fixe où elle sera détruite.

Mais, dans le second, il faut nécessairement que les couples appliqués au corps donnent un couple résultant nul de lui-même, comme s'il n'y avait pas de point fixe dans le corps; car, si ce couple n'est pas nul de lui-même, en le transportant, pour plus de clarté, de manière que le milieu de son bras de levier vienne tomber au point fixe, il est évident que ses deux forces ne pourront être en équilibre autour de ce point.

Et il est encore évident qu'elles ne seraient pas en équilibre, quand bien même il y aurait dans le corps un axe fixe, pourvu que le plan du couple ne passât point par cet axe, ou ne fût point parallèle à sa direction, ce qui reviendrait au même (49).

Ainsi, *lorsque différents couples, situés comme on voudra dans l'espace, sollicitent un corps ou*

*système assujetti à tourner autour d'un point fixe, les conditions de l'équilibre sont absolument les mêmes que si le corps était parfaitement libre.*

Et la même chose a lieu dans le cas d'un axe fixe, si les couples appliqués sont tellement disposés qu'ils ne puissent jamais donner un couple résultant parallèle à cet axe; ce qu'on ne peut assurer d'une manière générale que lorsque tous les couples sont dans des plans parallèles qui rencontrent l'axe fixe en le coupant

# CHAPITRE II.

## DES CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE.

**77.** Nous venons de voir (**68**) qu'on peut transformer chaque force P (*fig.* 26) qui agit sur un système en un certain point B, en une autre force P′ égale, parallèle et de même sens, appliquée en un autre point A pris à volonté dans l'espace, et en un couple (P, — P) appliqué sur AB, et dont l'énergie est mesurée par le moment P × AI, AI étant une perpendiculaire abaissé du point A sur la direction de la force P; que, de cette manière, le système peut être considéré comme sollicité par la résultante de toutes les forces qui se seraient en quelque sorte transportées parallèlement à elles-mêmes au point A, et par le couple résultant de tous les couples qui naissent de ces transformations. Nous avons vu que, pour l'équilibre, cette résultante et le moment du couple résultant doivent être nuls tous les deux à la fois. Fig. 26.

Nous pourrions développer sur-le-champ ces deux conditions dans le cas général d'un corps ou système sollicité par tant de forces que l'on voudra dans l'espace, et déduire de là les conditions de l'équilibre dans tous les cas particuliers qui peuvent se présenter; mais, comme notre marche doit toujours être uniforme dans le courant de ce chapitre, ou plutôt comme elle n'offrira qu'une même et continuelle application d'un même principe, nous aimons mieux passer en revue plusieurs questions simples, avant que de traiter la question générale. Cela nous fournira d'ailleurs l'occasion de répandre plusieurs propositions sur les moments, dont on fait beaucoup d'usage dans la Statique.

Une fois parvenu au théorème général de l'équilibre, on pourra s'y arrêter, et l'on y trouvera comprises toutes les propositions qui auront été précédemment expliquées.

## I.

### *De l'équilibre des forces parallèles qui sont situées dans un même plan.*

Fig. 30. **78.** Soient P, P′, P″, P‴ (*fig.* 30), etc., les différentes forces parallèles. D'un point A pris où l'on voudra dans leur plan, abaissons une perpendiculaire commune sur leurs directions et qui les coupe aux points respectifs B, C, D, etc.

Considérant d'abord la force P, j'applique au point A deux forces contraires P, — P, égales et parallèles à la première; ainsi, j'ai, au lieu de la simple force P appliquée en B, une force égale et parallèle appliquée en A, et un couple (P, — P) agissant sur AB et dont le moment est $P \times AB$. Je substitue de même, au lieu de la force P′ appliquée en C, une force égale et parallèle et de même sens appliquée en A, et un couple (P′, — P′) appliqué sur AC et dont le moment est $P \times AC$; de même pour la force P″, etc.

Si, pour plus de clarté, on transporte tous les couples ailleurs dans le même plan, il ne restera au point A que les forces P, P′, P″, etc., égales et parallèles aux forces primitives appliquées en B, C, D, etc., et de même sens.

Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut, 1°. que la résultante des forces appliquées en A soit nulle d'elle-même. Mais toutes ces forces agissant dans une même direction, leur résultante est égale à leur somme (*), et, par conséquent, l'on aura

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0,$$

première équation de l'équilibre.

(*) Il faut prendre ce mot, ici et ailleurs, dans le sens de la remarque suivante (79).

2°. Il faut que le moment résultant de tous les moments des couples soit aussi nul de lui-même. Mais ce moment résultant est égal à la somme des moments composants, puisque tous les couples sont dans un même plan. Donc, en nommant, pour abréger, $p$, $p'$, $p''$, etc., les bras de levier respectifs AB, AC, AD, etc., on aura

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} = 0,$$

seconde équation de l'équilibre.

*Remarque.*

**79.** Il est clair que dans la première équation, si l'on regarde les forces qui tirent dans un même sens comme positives, il faut regarder celles qui tirent dans le sens contraire comme négatives. Nous regarderons désormais comme positives les forces telles que P′ qui tirent au-dessus de la droite AD, et, par conséquent, comme négatives les forces telles que P, P″,... qui tirent au-dessous; et de cette manière on pourra dire que la *somme* des forces doit être nulle pour l'équilibre.

Pour les signes des moments $Pp$, $P'p'$,..., de la seconde équation, il faut faire attention à deux choses: 1° au signe de la force; 2° au signe du bras de levier.

Supposons, en effet, que la force P, sans

cesser d'agir du même côté du point A, vienne à changer de signe; il est clair que le couple nouveau qu'elle produira à l'égard du point A sera d'un sens contraire à celui du premier: ainsi, le moment P$p$ change de signe, lorsque la force P en change.

Concevons maintenant que la force P, sans changer de signe, vienne à agir au point B′ de l'autre côté du point A. Il est visible que le couple nouveau qu'elle produira à l'égard du point A sera d'un sens contraire à celui du premier, et, par conséquent, le moment P$p$ change de signe lorsque le seul bras de levier $p$ en change.

Donc, en prenant les bras de levier tels que AB, qui sont à droite du point A comme positifs, par exemple, il faudra prendre les bras de levier tels que AB′ qui tomberaient à gauche, comme négatifs; et l'on pourra toujours dire que la somme des moments doit être nulle en donnant des signes convenables aux forces et aux bras de levier.

*Corollaire.*

**80.** Supposons que les forces P, P′, P″, etc., ne soient pas en équilibre, mais qu'elles aient une résultante unique R, et que, par conséquent, —R soit une force capable de leur faire équilibre.

Les deux équations précédentes devront avoir lieu si l'on y fait entrer la force $-R$. On aura donc d'abord

$$P + P' + P'' + \text{etc.} - R = 0,$$

ou bien,

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.};$$

ce qui veut dire que la résultante est égale à la somme des composantes, comme nous le savions déjà.

En second lieu, si l'on nomme $r$ la distance de la résultante au point A, on aura

$$Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.} - Rr = 0,$$

ou bien,

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}$$

Ce qui nous fait voir que le produit de la résultante, par sa distance $r$ à un point quelconque A pris dans le plan des forces, est égal à la somme de tous les produits semblables des composantes par leurs distances respectives à ce même point.

En divisant cette équation par R, et mettant à la place de cette quantité sa valeur $P + P' + P'' + \text{etc.}$, on aura

$$r = \frac{Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}}.$$

Ce qui donnera la distance de la résultante au point A, et, par conséquent, fera connaître sa position, puisque l'on sait d'ailleurs qu'elle doit être parallèle aux composantes.

*Remarque.*

**81.** Les produits $Pp$, $P'p'$, etc., sont ce que l'on nomme ordinairement les moments des forces; mais on n'attache pas au mot de *moment* d'autre idée que celle d'un simple produit, qui résulte de deux nombres, dont l'un exprime la force et l'autre sa distance à un point : au lieu que le moment est pour nous la mesure d'une force particulière, c'est-à-dire de l'effort du couple qui provient de la force, lorsqu'on la transporte parallèlement à elle-même au point que l'on considère. Mais comme ici, et dans la plupart des Ouvrages de Statique, le moment exprime une même quantité numérique, à la différence près de l'idée que nous y joignons, nous avons cru devoir conserver ce mot, qui est consacré par l'usage et qui rend d'ailleurs assez bien notre idée, puisque le mot latin *momentum*, d'où vient *moment*, veut dire aussi *poids*, *force*, ou, plus exactement, *ce que vaut une force à raison de sa grandeur et du bras de levier par lequel elle agit.*

Au reste, lorsque nous ne voudrons parler que du simple produit numérique d'une force par sa distance à un point, à un axe perpendiculaire, ou à un plan parallèle à sa direction, nous dirons aussi le moment de la force par rapport au point, ou à l'axe, ou au plan parallèle; et cela n'introduira aucune équivoque dans le discours, puisque l'on pourra entendre si l'on veut, par ce produit, le moment du couple qui naîtrait de la force transportée parallèlement à elle-même au point, ou sur l'axe, ou dans le plan que l'on considère.

De cette manière l'équation précédente

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \text{etc.}$$

peut s'exprimer ainsi :

*La somme des moments de tant de forces parallèles qu'on voudra, par rapport à un point quelconque de leur plan, est égale au moment de leur résultante par rapport au même point;* ce qui est le théorème connu des moments, pour les forces parallèles qui sont situées dans un même plan.

## II.

*De l'équilibre des forces parallèles qui agissent sur différents points d'un corps dans l'espace.*

**82**. Soient P, P′, P″, etc. (*fig.* 31), les diffé- Fig. 31.
rentes forces parallèles. Je mène à volonté deux plans ZAY, ZAX, parallèles aux directions des forces, et qui se coupent suivant AZ à angle droit l'un sur l'autre, pour plus de simplicité. Cela posé, considérant d'abord la force P appliquée en B, j'abaisse une perpendiculaire BH sur la commune intersection AZ, et appliquant en H deux forces contraires P, — P égales et parallèles à la première, je considère, au lieu de la force P appliquée en B, une force égale et parallèle et de même sens appliquée en H, et un couple (P, — P) agissant sur BH. Si l'on fait la même transformation pour les autres forces P′, P″, etc., et que, pour plus de clarté, on conçoive tous les couples transportés ailleurs, chacun dans son plan, il ne restera dans l'axe AZ que les forces P, P′, P″, etc., respectivement égales et parallèles aux forces primitives, et de même sens.

Or la première condition de l'équilibre est que la résultante de toutes ces forces soit nulle d'elle-même; et comme elles agissent dans une

même droite, leur résultante est égale à leur somme; et, par conséquent, il faut qu'on ait

$$P + P' + P'' + \text{etc.} = 0.$$

La seconde condition de l'équilibre est que le moment résultant de tous les moments des couples soit aussi nul de lui-même. Mais ce moment résultant ne se trouve pas, comme tout à l'heure, en ajoutant les moments composants, car les couples ne sont pas dans un même plan ni dans des plans parallèles.

Pour l'obtenir, considérant d'abord le couple (P, — P), que je suppose ramené dans sa première position sur BH, j'abaisse du point B deux perpendiculaires BG, BI sur les deux plans ZAY, ZAX; et achevant le parallélogramme BGHI, je décompose le couple (P, — P) appliqué sur la diagonale BH, en deux autres, composés de forces égales, mais appliqués respectivement sur les deux côtés HI et GH (58) Ainsi, en nommant $x$ et $y$ ces lignes, ou leur égales BG et BI, le moment proposé P × BI sera décomposé en deux autres P$x$, P$y$, situé dans les plans respectifs ZAX, ZAY.

Si l'on nomme de même $x'$ et $y'$ les deu perpendiculaires abaissées du point d'applica tion de la force P′ sur les deux plans, le mo ment du couple (P′, — P′) pourra se décompos

dans ces deux plans en deux moments $P'x'$, $P'y'$; et ainsi de suite pour tous les couples.

Mais les moments qui sont dans le plan ZAX se réduiront à un seul L, égal à leur somme $Px + P'x' + P''x'' +$ etc.; tous ceux qui seront dans le plan ZAY se réduiront de même à un seul M égal à leur somme $Py + P'y' + P''y'' +$ etc., et ces deux moments résultants L et M se composeront enfin en un seul G qui sera le moment total : donc il faudra, pour l'équilibre, qu'on ait $G = 0$. Mais les deux moments L et M, étant situés dans des plans qui se coupent, ne peuvent jamais donner un moment résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls, chacun en particulier (**62**) ; et, partant, la seconde condition générale de l'équilibre $G = 0$ exige ces deux équations : $L = 0$, $M = 0$, c'est-à-dire,

$$Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.} = 0,$$
$$Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.} = 0.$$

Ce qui nous fait voir que, *pour l'équilibre d'un groupe de forces parallèles, il faut ces trois conditions particulières : que la somme de toutes les forces soit nulle, et que la somme de leurs moments, pris par rapport à deux plans qui se coupent suivant une parallèle à la direction de ces forces, soit nulle d'elle-même pour chacun de ces deux plans.*

*Remarque.*

**83.** Dans les équations précédentes, nous regarderons comme positives les forces qui tirent de bas en haut, et, par conséquent, comme négatives celles qui tirent dans le sens contraire.

Pour les signes des moments, il est clair qu'ils changent en même temps que ceux des forces. Mais, d'un autre côté, si une force telle que P, sans changer de signe, vient à agir en B′ de l'autre côté du plan ZAX, elle produira un couple d'un sens contraire à celui du premier et, par conséquent, le moment change encore de signe lorsque le seul bras de levier en change. Donc, si, par rapport à un plan, on regarde les bras de levier qui tombent d'un côté comme positifs, il faudra regarder ceux qui tombent de l'autre côté comme négatifs; et l'on pourra toujours dire que la somme des moments est nulle, en donnant des signes convenables aux forces et aux bras de levier.

*Corollaire* I.

**84.** Supposons que les forces P, P′, P″, etc. ne soient pas en équilibre, mais qu'elles aient une résultante unique R, et que, par conséquent, — R soit une force capable de leur faire équ

libre. Les trois équations précédentes devront avoir lieu en y introduisant la force — R. On aura donc d'abord

$$R = P + P' + P'' + \text{etc.},$$

ce qui donne la valeur de la résultante.

Si l'on nomme ensuite $p$ et $q$ les distances respectives de cette résultante aux deux plans ZAY, ZAX, on aura

$$Rp = Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.},$$
$$Rq = Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.};$$

d'où, en mettant pour R sa valeur, on tire

$$p = \frac{Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}},$$
$$q = \frac{Py + P'y' + P''y'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}},$$

ce qui donnera les distances de la résultante à deux plans, et fera connaître sa position dans l'espace; car, si l'on mène aux deux distances trouvées, deux plans respectivement parallèles aux premiers, la direction de la résultante, qui doit se trouver à la fois dans ces deux plans, ne sera autre chose que leur intersection même.

**85.** On voit que les équations précédentes nous fournissent ces deux conséquences, qu'on peut énoncer ainsi, conformément à l'usage :

*La somme des moments de tant de forces parallèles que l'on voudra, par rapport à un plan quelconque parallèle à leurs directions, est égale au moment de leur résultante.*

*Et la distance de la résultante à ce plan est égale à la somme des moments des forces, divisée par la somme de toutes les forces.*

### *Corollaire* II.

### *Du centre des forces parallèles.*

**86.** Puisque le centre des forces parallèles est situé sur la direction de la résultante, il est clair que la distance de ce centre à un plan quelconque parallèle aux forces se trouvera comme la distance de la résultante à ce plan; c'est-à-dire en divisant la somme des moments, par rapport au plan, par la somme de toutes les forces.

Si l'on veut avoir ensuite la distance de ce centre à un plan quelconque, on concevra que les forces, sans changer de grandeur, sans cesser d'être parallèles et de passer aux mêmes points soient tournées toutes parallèlement à ce nouveau plan; et l'on aura pour cette seconde distance la somme des nouveaux moments divisée par la somme de toutes les forces.

On fera la même opération pour un troisième

plan; et si l'on mène alors aux trois distances trouvées, trois plans respectivement parallèles aux trois premiers, le centre des forces devant se trouver à la fois dans ces trois plans sera déterminé par leur intersection.

**87.** Si toutes les forces étaient égales et de même sens, l'expression

$$\frac{Px + P'x' + P''x'' + \text{etc.}}{P + P' + P'' + \text{etc.}},$$

qui donne la distance du centre à un plan quelconque, deviendrait

$$\frac{Px + Px' + Px'' + \text{etc.}}{P + P + P + \text{etc.}} = \frac{x + x' + x'' + \text{etc.}}{n},$$

$n$ étant le nombre des forces parallèles.

Ainsi, la distance du centre au plan serait égale à la somme des distances de tous les points d'application, divisée par leur nombre, ou, si l'on veut, égale à la moyenne distance de tous les points d'application : d'où l'on voit que, dans le cas où les forces sont égales, le centre des forces est un point dont la position ne dépend plus que de la figure formée par les points d'application.

## III.

### *De l'équilibre des forces qui agissent dans un même plan suivant des directions quelconques.*

Fig. 32. **88.** Soient P′, P″, P‴, etc. (*fig.* 32), les différentes forces situées d'une manière quelconque dans un même plan. D'un point quelconque A pris dans ce plan, abaissons sur leurs directions respectives des perpendiculaires AB, AC, AD, etc., qui les rencontrent en B, C, D, etc., et nommons $p'$, $p''$, $p'''$, etc., ces perpendiculaires.

Il est clair que la force P′ pourra se décomposer en une autre égale, parallèle et de même sens appliquée en A, et un couple dont le moment sera $P' \times AB$, ou $P'p'$. De même la force P″ se décomposera en une autre égale parallèle et de même sens, appliquée en A, e en un couple dont le moment sera $P'' \times AC$ ou $P''p''$; et ainsi de suite pour toutes les autre forces P‴, etc.

Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que l résultante de toutes les forces appliquées en A soit nulle d'elle-même, et que le moment résul tant de tous les moments $P'p'$, $P''p''$, $P'''p'''$, etc soit aussi nul de lui-même.

Cette dernière condition est très-facile à-exprimer, car tous les couples étant dans un même plan, le couple résultant est égal à la somme des couples composants, et l'on a sur-le-champ

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0.$$

Pour exprimer l'autre condition, imaginons qu'on décompose les forces P′, P″, P‴, etc., appliquées en A, chacune en deux autres suivant deux lignes quelconques AX, AY qui se coupent en A dans le plan des forces. Nommons X′ et Y′ les deux composantes de P′ suivant les axes respectifs AX, AY; de même, X″, Y″, X‴, Y‴, etc., les composantes analogues des autres forces P″, P‴, etc., suivant les mêmes axes. Toutes les forces X′, X″, X‴, etc., étant dans une même droite AX, se composeront en une seule $X = X' + X'' + X''' + \text{etc.}$; de même, les forces Y′, Y″, Y‴, etc., se composeront en une seule $Y = Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.}$, et ces deux résultantes partielles se composeront en une seule R qui sera la résultante générale. Il faudra donc, pour l'équilibre, qu'on ait $R = 0$. Mais les deux forces X et Y, agissant suivant deux lignes qui se coupent, ne peuvent donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles elles-mêmes, chacune en particulier (37). Et, par conséquent, la condition $R = 0$ exige ces deux équations:

$X = 0$, $Y = 0$, c'est-à-dire

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0.$$

Les forces $P'$, $P''$, $P'''$, etc., appliquées au point A, étant parfaitement égales et parallèles aux forces primitives appliquées dans le plan, il est clair que les composantes $X'$, $Y'$, $X''$, $Y''$, $X'''$, $Y'''$, etc., sont, pour la quantité, parfaitement les mêmes que si l'on avait décomposé les forces primitives $P'$, $P''$, $P'''$, etc., chacune en son lieu; et, par conséquent, les conditions de l'équilibre entre tant de forces que l'on voudra, situées dans un même plan, sont :

1°. *Que la somme des forces décomposées parallèlement à deux axes qui se coupent dans le plan soit nulle par rapport à chacun de ces axes;*

2°. *Que la somme des moments des forces, par rapport à un point quelconque du plan, soit nulle d'elle-même.*

**89.** Si l'on trouvait que la dernière condition a lieu par rapport à un certain point connu, et que les deux autres ont aussi lieu par rapport aux directions de deux axes connus, qu'on peut toujours supposer menés par ce point, il y aurait équilibre dans le système; et, puisqu'il y aurait équilibre, les mêmes conditions auraien

lieu par rapport à tous les points et à tous les axes possibles, pris dans le plan des forces.

*Corollaire.*

**90.** Si les forces $P'$, $P''$, $P'''$, ne sont pas en équilibre entre elles, mais qu'elles soient susceptibles de se réduire à une seule $R$, de sorte que $-R$ soit une force capable de les tenir en équilibre, l'équation des moments aura lieu en y introduisant la force $-R$. Donc, en désignant par $r$ la distance de cette force au point $A$, on aura l'équation

$$-Rr + P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0,$$

ou

$$Rr = P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.};$$

c'est-à-dire que *le moment de la résultante, par rapport à un point quelconque du plan des forces, est égal à la somme des moments des composantes par rapport au même point.* Ce qui donne le théorème connu des moments.

Si le point par rapport auquel on prend les moments, et qu'on nomme ordinairement *le centre des moments,* tombait sur la direction même de la résultante $R$, la distance $r$ serait nulle; par conséquent, le moment $Rr$ serait nul aussi, et l'on aurait

$$0 = P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.}$$

Ce qui nous fait voir que, *par rapport à un point quelconque de la direction de la résultante, la somme des moments de tant de forces que l'on voudra situées dans un même plan est toujours égale à zéro.*

*Remarque.*

**91**. Dans l'équation

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0,$$

qui exprime la seconde condition générale de l'équilibre, il faudra distinguer les moments des couples qui agissent dans un sens, d'avec les moments de ceux qui agissent dans le sens contraire, et leur donner des signes différents. Mais, pour plus de clarté et de précision, nous allons reproduire cette équation sous une autre forme.

*Manière plus simple de présenter les conditions précédentes.*

Fig. 33. **92**. Soient B′, B″, B‴, etc. (*fig.* 33), les points où les forces P′, P″, P‴, etc., sont immédiatement appliquées dans le plan. Soient $x'$ et $y'$ les deux coordonnées AG′ et G′B′ du point B′, par rapport aux deux axes quelconques AX, AY; $x''$ et $y''$ les deux coordonnées analogues du point B″, et ainsi de suite. Supposons que l'on dé-

compose d'abord toutes les forces $P'$, $P''$, $P'''$, etc., parallèlement aux deux axes AX, AY; et nommant, comme plus haut, $X'$ et $Y'$ les deux composantes de $P'$; $X''$ et $Y''$ les deux composantes de $P''$, etc., ne considérons plus, au lieu des forces données $P'$, $P''$, $P'''$, etc., que les deux groupes $X'$, $X''$, $X'''$, etc., $Y'$, $Y''$, $Y'''$, etc.

D'abord, les forces parallèles $X'$, $X''$, $X'''$, etc., étant transportées parallèlement à elles-mêmes dans l'axe AX, s'y composeront en une seule égale à leur somme. Les forces parallèles $Y'$, $Y''$, $Y'''$, etc., étant transportées de même dans l'axe AY, s'y composeront aussi en une seule égale à leur somme.

Ces deux résultantes partielles se composeront en une seule appliquée en A, et par la première condition générale de l'équilibre, qui veut que cette résultante soit nulle, on aura, comme ci-dessus, les deux équations

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0.$$

Il faut exprimer ensuite que la somme des moments des couples formés par toutes ces forces à l'égard du point A est nulle d'elle-même. Mais en observant que l'axe AX fait avec les directions des forces $Y'$, $Y''$, etc., des angles égaux entre eux et à ceux que l'axe AY forme

avec les directions des forces X′, X″, etc., on voit sur-le-champ qu'on peut prendre les produits $X'y'$, $X''y''$, etc., $Y'x'$, $Y''x''$, etc., pour moments, dans la mesure relative des différents couples. Donc, puisque leur somme doit être nulle, on aura l'équation

$$X'y' + X''y'' + \text{etc.} + Y'x' + Y''x'' + \text{etc.} = 0.$$

Cette équation remplace la précédente (**91**)

$$P'p' + P''p'' + P'''p''' + \text{etc.} = 0;$$

mais au lieu des perpendiculaires $p', p'', p'''$, etc. qu'il faut abaisser du point A sur les direction respectives des forces, elle contient les coor données des points où les forces sont immé diatement appliquées dans le plan. Elle a d plus cet avantage, que les termes $X'y'$, $X''y$ $Y'x'$, etc., prendront d'eux-mêmes les sign qui conviennent aux sens respectifs des coupl dont ils représentent les moments, si l'on a so de donner aux forces et aux coordonnées d signes convenables.

On pourra prendre, comme en Géométri les abscisses $x', x''$, etc., positives à la droi de l'origine, et, par conséquent, négatives à gauche; les ordonnées $y', y''$, etc., positives a dessus de l'axe des abscisses, et, par conséque négatives au-dessous.

Quant aux forces, il est clair que, dans chaque groupe, il faudra donner des signes contraires à celles qui agissent en sens contraires.

Mais en considérant dans le premier groupe une force telle que X″, qui tire à droite de l'axe AY, et dans le second, une force telle que Y′, qui tire au-dessous de l'axe AX, il est facile de voir que ces deux forces donnent, à l'égard du point A, des couples de même sens, lorsque leurs coordonnées AH″ et AG′ ou $y''$ et $x'$ sont de même signe. Donc il faudra que les forces du premier groupe, qui tirent à droite de l'axe des ordonnées, aient le même signe que les forces du second, qui tirent au-dessous de l'axe des abscisses; donc, si l'on regarde les premières comme positives, on regardera aussi les secondes comme positives; et, de cette manière, tous les moments écrits sous le même signe dans l'équation précédente prendront des signes relatifs aux sens des couples.

**93.** Mais si dans le premier groupe X′, X″, X‴, etc., regardant toujours comme positives les forces qui tirent à droite de l'axe des ordonnées, ou qui tendent à augmenter les abscisses de leurs points d'application, on voulait, pour la symétrie, regarder aussi comme positives

dans le second groupe Y′, Y″, Y‴, etc., les forces qui tirent au-dessus de l'axe des abscisses, ou qui tendent à augmenter les ordonnées de leurs points d'application, il faudrait alors donner un signe contraire à toute la partie des moments relatifs à ce groupe ; et l'équation précédente se mettrait sous cette forme :

$$X'y' + X''y'' + \text{etc.} - Y'x' - Y''x'' - \text{etc.} = 0.$$

Nous retiendrons désormais cette expression de préférence à la première, parce que, dans les deux groupes, les forces positives seront celles qui tendent à augmenter les coordonnées de leurs points d'application, et les forces négatives, celles qui tendent à diminuer les mêmes coordonnées.

*Corollaire* I.

Fig. 34. **94**. Si les deux axes AX, AY (*fig.* 34) étaien à angle droit, les abscisses et les ordonnée elles-mêmes deviendraient les bras de levier de couples, et les moments $X'y'$, etc., $Y'x'$, etc. donneraient la mesure absolue de leurs efforts De plus, en nommant $\alpha'$ l'angle que fait la di rection de la force P′ avec l'axe des abscisses on aurait, pour la composante X′ parallèle à ce axe, $P' \cos \alpha'$. On aurait pour l'autre composant Y′, $P' \sin \alpha'$.

En nommant de même $\alpha''$ l'angle de la direction de la force $P''$ avec l'axe des abscisses, on aurait $X'' = P'' \cos \alpha''$, $Y'' = P'' \sin \alpha''$, et ainsi de suite; et les équations précédentes deviendraient

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = 0,$$

$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \text{etc.} = 0,$$

$$P'(y' \cos \alpha' - x' \sin \alpha') + P''(y'' \cos \alpha'' - x'' \sin \alpha'') + P'''(y''' \cos \alpha''' - x''' \sin \alpha''') + \text{etc.} = 0.$$

Dans ces équations, on n'aurait pas besoin de faire attention aux signes des forces, mais seulement à ceux des abscisses et des ordonnées. On regarderait toutes les forces $P'$, $P''$, $P'''$, etc., comme essentiellement positives : les signes des sinus et des cosinus donneraient les signes relatifs des composantes $P' \cos \alpha'$, etc., $P' \sin \alpha'$, etc., comme cela est facile à observer, si l'on veut se donner la peine de faire parcourir une circonférence entière à la direction d'une force telle que $P'$ autour de son point d'application $B'$.

*Remarque.*

C'est de cette manière que l'on donne ordinairement les équations de l'équilibre pour des forces quelconques situées dans un même plan. Ces équations renferment, sous l'expression la

plus simple, les premières données de la question, savoir : les quantités des forces, leurs directions, par les angles qu'elles font avec une droite fixe de position, et leurs points immédiats d'application, par leurs coordonnées rectangles. Nous aurions donc pu les présenter les premières, et même nous abstenir de considérer les autres par rapport à des axes obliques; mais comme on les démontre quelquefois par cette considération, que les deux groupes de forces sont rectangulaires entre eux, nous avons été bien aise de faire voir qu'elles ne sont qu'un cas particulier de celles qu'on trouve par rapport à des axes obliques quelconques, et que la rectangularité des forces n'y entre pour rien. Nous reviendrons encore sur cette remarque.

*Corollaire* II.

**95**. Supposons qu'il n'y ait point équilibre entre les forces $P'$, $P''$, $P'''$, etc., et que ces forces soient susceptibles de se réduire à une seule R, qui sera leur résultante.

Alors les trois équations de l'équilibre auront lieu en y introduisant la force $-R$.

Soient donc $\alpha$ l'angle que fait la direction de cette force avec l'axe des abscisses; $x$ et $y$ les deux coordonnées d'un point quelconque de cette direction.

En faisant, pour abréger,

$$P' \cos \alpha' + P'' \cos \alpha'' + P''' \cos \alpha''' + \text{etc.} = X,$$

$$P' \sin \alpha' + P'' \sin \alpha'' + P''' \sin \alpha''' + \text{etc.} = Y,$$

et $P'(y' \cos \alpha' - x' \sin \alpha) + P''(y'' \cos \alpha'' - x'' \sin \alpha'')$
$+ P'''(y''' \cos \alpha''' - x''' \sin \alpha''') + \text{etc.} = G,$

on aura d'abord

$$X - R \cos \alpha = 0, \quad Y - R \sin \alpha = 0,$$

d'où l'on tirera, à cause de $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}};$$

ce qui fera connaître la quantité de la résultante et l'angle $\alpha$ que sa direction fait avec l'axe des abscisses.

On aura ensuite

$$G - R(y \cos \alpha - x \sin \alpha) = 0;$$

ou bien, en mettant pour $R \cos \alpha$ et $R \sin \alpha$, leurs valeurs X et Y,

$$G - Xy + Yx = 0.$$

Comme on n'a qu'une équation pour déterminer les deux coordonnées $x$ et $y$, on sera maître de prendre l'une ou l'autre à volonté. Supposant, par exemple, $x = 0$, auquel cas on

demande le point où la résultante coupe l'axe des $y$, on aura

$$y = \frac{G}{X}.$$

Si l'on suppose $y = 0$, auquel cas on cherche la distance $x$ du point où la direction de la résultante coupe l'axe des abscisses, on aura

$$x = -\frac{G}{Y}.$$

On aura donc tout ce qu'il faudra pour déterminer la quantité et la position de la résultante de tant de forces que l'on voudra, situées dans un même plan.

Si l'on n'a trouvé qu'une seule équation pour les deux coordonnées $x$ et $y$ du point d'application de la résultante, c'est que, cette résultante pouvant être appliquée à l'un quelconque des points de sa direction, il est impossible que le calcul donne l'un de ces points plutôt que l'autre. Il ne peut donc donner que leur lieu géométrique; et l'équation précédente

$$G - Xy + Yx = 0$$

est, à proprement parler, l'équation de la direction de la résultante.

*Remarque.*

**96.** Dans les trois questions I, II, III, que nous venons de traiter ci-dessus, toutes les

forces étant ramenées à une seule R et à un seule couple (S, — S), il y aura toujours une résultante unique, si la force R n'est pas nulle. Car la force R et le couple (S, — S) seront toujours dans un même plan ou dans des plans parallèles, et, par conséquent (**71**), se composeront toujours en une seule force. Ainsi, la seule condition nécessaire pour que des forces parallèles, ou des forces situées dans un même plan, aient une résultante unique, est que la résultante de ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque ne soit pas nulle.

Si cette résultante est nulle, alors toutes les forces du système seront ramenées à un couple dont on connaîtra le plan et la grandeur, et l'on ne pourra leur faire équilibre qu'au moyen d'un couple équivalent et de sens contraire, situé dans le même plan ou dans tout autre plan parallèle.

Passons maintenant au cas le plus général.

## IV.

*Des conditions de l'équilibre entre tant de forces que l'on voudra, dirigées d'une manière quelconque dans l'espace.*

**97.** Soient P′, P″, P‴, etc. (*fig.* 35), les diffé- Fig. 35.
rentes forces. D'un point A pris arbitrairement dans l'espace, menons trois axes quelconques

AX, AY, AZ, qui ne soient pas dans un même plan, et décomposons chaque force en trois autres respectivement parallèles à ces axes.

Nommons X′, Y′, Z′ les trois composantes de P′; X″, Y″, Z″ les trois composantes de P″; et ainsi de suite. Nous aurons alors, au lieu des forces P′, P″, P‴, etc., appliquées au système, trois groupes de forces parallèles : le premier, composé des forces X′, X″, X‴, etc., parallèles à l'axe AX; le second, composé des forces Y′, Y″, Y‴, etc., parallèles à l'axe AY; et le troisième, composé des forces Z′, Z″, Z‴, etc., parallèles à l'axe AZ.

Cela posé : si l'on transporte toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes au point A, celles du premier groupe iront se réunir dans l'axe AX, et s'y composeront en une seule X égale à leur somme; celles du second iront de même se réunir dans l'axe AY, et s'y composeront en une seule Y égale à leur somme; enfin, celles du troisième se réuniront dans l'axe AZ, et s'y composeront en une seule Z égale à leur somme. Maintenant ces trois résultantes partielles X, Y, Z se composeront en une seule R appliquée en A, et représentée par la diagonale du parallélipipède construit sur les trois lignes qui représenteraient ces forces en grandeur et en direction.

Or, par la première condition générale de l'équilibre, il faut que cette résultante soit nulle d'elle-même. Mais les trois forces X, Y, Z, agissant suivant des lignes qui ne sont pas dans un même plan, ne peuvent jamais donner une résultante nulle, à moins qu'elles ne soient nulles chacune en particulier (**42**); et, par conséquent, la condition $R = 0$ exige ces trois équations particulières, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, c'est-à-dire

$$X' + X'' + X''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + \text{etc.} = 0,$$
$$Z' + Z'' + Z''' + \text{etc.} = 0.$$

Ce qui nous apprend que pour l'équilibre de tant de forces que l'on voudra, appliquées d'une manière quelconque à un corps ou système de figure invariable, il faut d'abord ces trois conditions particulières : que *la somme des forces décomposées parallèlement à trois axes quelconques soit nulle par rapport à chacun de ces axes.*

Par la seconde condition générale de l'équilibre, il faut que le couple résultant de tous les couples formés par les forces à l'égard du point A, soit aussi nul de lui-même. Développons maintenant cette seconde condition.

Soit B′ le point d'application de la force P′;

et, par conséquent, le point d'application des trois composantes X′, Y′, Z′; nommons $x'$, $y'$, $z'$ ses trois coordonnées AC, CH, HB′, par rapport aux trois axes AX, AY, AZ. Nommons de même $x''$, $y''$, $z''$ les trois coordonnées du point d'application B″ des trois composantes X″, Y″, Z″; et ainsi de suite.

Considérant d'abord le groupe des forces Z′, Z″, Z‴, etc., je remarque que la force Z′ appliquée en B′ a produit un couple (Z′, — Z′) appliqué sur AB′, ou bien (en concevant la force Z′ appliquée au point H où sa direction rencontre le plan YAX) a produit un couple (Z′, — Z′) appliqué sur la diagonale AH d'un parallélogramme ACHD, dont les deux côtés AC, AD sont égaux aux coordonnées $x'$ et $y'$. Or ce couple peut se décomposer en deux autres composés de forces égales et parallèles aux premières, mais appliquées sur les deux côtés AC, AD ou $x'$, $y'$, dans les plans respectifs XAZ, YAZ (57).

Si l'on fait la même décomposition de tous les couples provenant du groupe Z′, Z″, Z‴, etc. dans les deux plans parallèles à ce groupe, et les décompositions semblables de tous ceux qui proviennent des deux autres groupes, par rapport aux deux plans analogues, il est manifeste que tous les couples du système seront réduits

à d'autres, situés dans les trois plans coordonnés.

Or, dans chaque plan, les couples se réduiront à un seul, égal à leur somme. Ces trois couples résultants partiels se composeront en un seul qui sera le couple résultant général, et qui devra être nul pour l'équilibre. Mais ces trois couples, étant situés dans trois plans qui forment un angle solide, ne peuvent jamais donner un couple résultant nul, à moins qu'ils ne soient nuls chacun en particulier (65); donc, pour chacun des trois plans, la somme des moments des couples doit être nulle d'elle-même.

Or, dans le plan YAZ, on trouvera d'abord les couples

$$(Z', -Z'),\ (Z'', -Z''),\ (Z''', -Z'''),\ \text{etc.},$$

appliqués sur les lignes respectives

$$y',\ y'',\ y''',\ \text{etc.},$$

ensuite les couples

$$(Y', -Y'),\ (Y'', -Y''),\ (Y''', -Y'''),\ \text{etc.},$$

appliqués sur les lignes respectives

$$z',\ z'',\ z''',\ \text{etc.}$$

Et comme l'axe AY fait, avec les directions des forces $Z'$, $Z''$, $Z'''$, etc., des angles égaux entre eux et à ceux que forme l'axe AZ avec les directions des forces $Y'$, $Y''$, $Y'''$, etc., on pourra

prendre les produits $Z'y'$, etc., $Y'z'$, etc., pour moments, dans la mesure relative des couples situés dans le plan YAZ. Donc, puisque leur somme doit être nulle, on aura (**93**)

$$Y'z' + Y''z'' + \text{etc.} - Z'y' - Z''y'' - \text{etc.} = 0.$$

On trouvera de même, pour les deux autres plans,

$$Z'x' + Z''x'' + \text{etc.} - X'z' - X''z'' - \text{etc.} = 0,$$
$$X'y' + X''y'' + \text{etc.} - Y'x' - Y''x'' - \text{etc.} = 0;$$

ce qui nous fait voir que, pour l'équilibre du système, outre les trois équations trouvées ci-dessus, il nous en faut encore trois autres qui expriment que *la somme des produits des composantes parallèles au plan de deux axes, par leurs coordonnées relatives au troisième axe, doit être nulle d'elle-même pour chacun des trois plans.*

**98.** Dans les équations précédentes, on prendra les signes des coordonnées, comme en Géométrie, positives dans un même coin XAYZ, et négatives dans le coin opposé.

Parmi les forces, on regardera, dans chaque groupe, comme positives celles qui tendent à augmenter les coordonnées de leurs points d'application, comme négatives celles qui tendent à les diminuer (**93**).

*Remarque.*

**99**. Si l'on trouvait que les six équations précédentes ont lieu par rapport à trois axes particuliers non situés dans le même plan, il y aurait équilibre dans le système, et, par conséquent, les mêmes équations auraient lieu par rapport à tous les axes possibles.

*Corollaire* I.

**100**. Si les trois axes AX, AY, AZ étaient rectangulaires entre eux, les coordonnées deviendraient les bras de levier des couples, et les produits $Z'y'$, $Y'x'$, $X'z'$, etc., etc., les expressions absolues de leurs moments.

De plus, en nommant $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les trois angles que la direction de la force $P'$ fait avec les trois axes respectifs AX, AY, AZ, ou plutôt avec trois parallèles à ces axes, on aurait pour les trois composantes de $P'$ (**45**),

$$X' = P' \cos \alpha', \quad Y' = P' \cos \beta', \quad Z' = P' \cos \gamma'.$$

En nommant de même $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, etc., les angles analogues des directions des forces $P''$, etc., avec les mêmes axes, on aurait

$$X'' = P'' \cos \alpha'', \quad Y'' = P'' \cos \beta'', \quad Z'' = P'' \cos \gamma'', \text{ etc.},$$

et les équations précédentes deviendraient

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.} = 0,$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \text{etc.} = 0,$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \text{etc.} = 0,$$
$$P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'') + P'''(z'''\cos\beta''' - y'''\cos\gamma''') + \text{etc.} = 0,$$
$$P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + P'''(x'''\cos\gamma''' - z'''\cos\alpha''') + \text{etc.} = 0,$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'') + P'''(y'''\cos\alpha''' - x'''\cos\beta''') + \text{etc.} = 0.$$

*Remarque.*

**101.** C'est sous cette forme que l'on présente ordinairement les six équations de l'équilibre. Elles renferment d'une manière très-simple les quantités des forces P′, P″, P‴, etc., leurs points d'application, au moyen de leurs coordonnées rectangles par rapport à trois axes, et leurs directions, par les cosinus des angles qu'elles font avec ces axes.

Comme on a coutume d'attribuer aux forces rectangulaires une certaine indépendance d'effets, qui ne leur appartient pas plus qu'à celles qui agissent sous un angle quelconque, pourvu qu'il ne soit pas nul, il est bon de remarquer que les équations d'équilibre, par rapport à des axes rectangulaires, ne sont qu'une simple

conséquence de celles qu'on trouve par rapport à des axes obliques quelconques, et que, par conséquent, le principe de l'indépendance entre les effets des forces rectangulaires ne doit entrer pour rien dans leur démonstration.

Observons d'ailleurs que, d'après ce principe un peu vague, on pourrait être conduit par un raisonnement très-simple à une erreur très-grossière : car, en considérant, par exemple, deux groupes de forces rectangulaires, situés dans un même plan, si l'on suppose qu'il y a indépendance entre les effets de ces deux groupes, on en conclura que lorsque leur système est en équilibre, chaque groupe doit être en équilibre de lui-même ; ce qui n'est pas vrai.

Et il en est de même dans le cas de trois groupes de forces rectangulaires dans l'espace, dont le système peut être en équilibre, sans qu'il y ait équilibre en particulier dans chaque groupe, ni même dans aucun d'eux.

Il faudrait donc, dans ces deux cas, ne faire de ce principe qu'un usage restreint, et ne considérer l'indépendance des effets que relativement aux mouvements de translation que les forces peuvent donner au système ; ou bien il faudra avoir soin de ne l'appliquer qu'au cas de deux groupes, l'un composé de forces per-

pendiculaires à un même plan, et l'autre de forces quelconques situées dans ce plan, auquel cas l'indépendance des effets a lieu d'une manière absolue. Mais comme cette indépendance aurait lieu tout de même, si le premier groupe tombait sur le plan du second sous un autre angle quelconque, pourvu qu'il ne fût pas nul, il s'ensuit qu'elle n'a pas lieu parce que les groupes font un angle droit, mais seulement parce qu'ils font un angle. Ainsi, dans tous les cas, le raisonnement qui prouve le principe en question étant fondé sur ce que les forces font un angle droit, tombe de lui-même, parce qu'il n'est fondé sur rien.

### *Corollaire* II.

**102.** On peut donner aux trois dernières équations de l'équilibre une forme plus simple, en y introduisant, à la place des coordonnées des points d'application, les plus courtes distances des directions des forces aux trois axes rectangulaires.

En effet, dans la première équation, à la place du terme $P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma')$, qui exprime la somme des moments des deux forces $P'\cos\beta'$, $P'\cos\gamma'$, par rapport au point où leur plan irait couper l'axe des $x$, on peut en substi-

tuer un autre qui exprime le moment de leur résultante par rapport au même point (90).

Les deux forces $P' \cos\beta'$, $P' \cos\gamma'$, étant rectangulaires entre elles, on a pour le carré de leur résultante, $P'^2 \cos^2\beta' + P'^2 \cos^2\gamma'$, ou $P'^2 (\cos^2\beta' + \cos^2\gamma')$; ou bien (à cause de $\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$), $P'^2 (1 - \cos^2\alpha')$, c'est-à-dire $P'^2 \sin^2\alpha'$.

La résultante est donc $P' \sin\alpha'$. La distance de cette résultante à l'axe des $x$ étant nommée $p'$, on aura, pour son moment, $P'p' \sin\alpha'$, qui remplace le terme $P'(z' \cos\beta' - y' \cos\gamma')$; on aura, de même, $P''p'' \sin\alpha''$, etc., à la place des termes suivants de la première équation, en désignant par $p''$, etc., les distances respectives des résultantes analogues à la première, par rapport à l'axe des $x$.

La première équation sera donc mise sous cette forme :

$$P'p' \sin\alpha' + P''p'' \sin\alpha'' + P'''p''' \sin\alpha''' + \text{etc.} = 0.$$

Or il est visible que $p'$, $p''$, $p'''$, etc., ne sont autre chose que les plus courtes distances des forces $P'$, $P''$, $P'''$, etc., à l'axe des $x$; car la force $P' \sin\alpha'$, qui est située dans un plan perpendiculaire à cet axe, étant composée avec la force $P' \cos\alpha'$, perpendiculaire au même plan, devrait donner pour résultante la force $P'$ qui est

dans l'espace. La force $P' \sin \alpha'$ n'est donc autre chose que la projection de la force $P'$ sur un plan perpendiculaire à l'axe des $x$; et, par conséquent, la plus courte distance $p'$ de cette projection à l'axe des $x$ n'est autre chose que la plus courte distance de la force $P'$ au même axe.

Si l'on désigne par $q'$, $q''$, $q'''$, etc., et par $r'$, $r''$, $r'''$, etc., les plus courtes distances des forces $P'$, $P''$, $P'''$, etc., aux axes respectifs des $y$ et des $z$, on trouvera de même, pour les deux autres équations,

$$P'q' \sin \beta' + P''q'' \sin \beta'' + P'''q''' \sin \beta''' + \text{etc.} = 0,$$
$$P'r' \sin \gamma' + P''r'' \sin \gamma'' + P'''r''' \sin \gamma''' + \text{etc.} = 0.$$

**103.** La projection d'une force sur un plan, multipliée par sa distance à un axe perpendiculaire au plan, est ce qu'on nomme ordinairement *le moment* de la force par rapport à l'axe; et de cette manière on énonce ainsi les trois équations précédentes de l'équilibre :

*La somme des moments des forces doit être nulle, par rapport à chacun des trois axes, dans le cas de l'équilibre.*

### *Corollaire* III.

**104.** Si, dans les six équations de l'équilibre on veut supposer que les forces $P'$, $P''$, $P'''$, etc. sont toutes parallèles, ou toutes situées dans un

même plan, etc., etc., et qu'on mette à la place des coordonnées $x'$, $y'$, $z'$, etc., et des angles $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, etc., les valeurs qui conviennent à ces suppositions, on retombera sur les équations d'équilibre précédemment trouvées pour ces différents cas, et l'on en tirera les mêmes conséquences.

**105.** Si l'on suppose, par exemple, que les directions des forces P′, P″, P‴, etc., concourent toutes au même point, et qu'on ait pris ce point pour l'origine des coordonnées, les cosinus des angles $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, etc., seront proportionnels aux coordonnées respectives $x'$, $y'$, $z'$, etc., des points d'application; de sorte que l'on aura

$$x' : y' :: \cos\alpha' : \cos\beta', \quad x' : z' :: \cos\alpha' : \cos\gamma', \text{ etc.};$$

ou

$$y' \cos\alpha' - x' \cos\beta' = 0,$$
$$x' \cos\gamma' - z' \cos\alpha' = 0,$$
etc.

Les trois dernières équations de l'équilibre disparaîtront donc d'elles-mêmes, et l'on n'aura plus que les trois premières, qui nous font voir que, *pour l'équilibre d'un système de forces dont les directions concourent toutes vers un même point, il est nécessaire et il suffit que la somme des forces décomposées suivant trois axes soit égale à zéro par rapport à chacun de ces axes;* et c'est ce que l'on savait d'ailleurs immédiatement.

Si l'on suppose que les forces P′, P″, P‴, etc., ne forment ensemble que des couples; comme alors chaque force P′, inclinée sur l'axe des $x$ d'un certain angle $\alpha'$, aura dans le système son égale, mais inclinée au même axe de l'angle $200° + \alpha'$, il n'y aura pas de terme $P' \cos \alpha'$ qui ne trouve son égal et contraire dans la première équation de l'équilibre; et la même chose aura lieu dans les deux autres. Ainsi, les trois premières équations disparaîtront d'elles-mêmes, et l'on n'aura plus que les trois dernières; d'où il résulte que, *pour l'équilibre de tant de couples qu'on voudra appliqués sur un corps, il est nécessaire et il suffit que la somme de ces couples décomposés perpendiculairement à trois axes soit égale à zéro par rapport à chacun de ces axes :* ce qui était d'ailleurs aussi clair que la proposition précédente.

*Corollaire* IV.

*Recherche de la résultante de toutes les forces* P′, P″, P‴, *etc., lorsque ces forces ne sont pas en équilibre, et qu'elles sont susceptibles de se réduire à une seule.*

**106.** Supposons qu'il n'y ait point équilibre entre les forces P′, P″, P‴, etc.; et soit, s'il est possible, la force — R capable de leur faire équilibre, et, par conséquent, R leur résultante.

Les six équations précédentes devront avoir lieu en y faisant entrer la force $-R$.

Soient donc $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les trois angles que forme la direction de la résultante avec les trois axes coordonnés. En faisant, pour abréger,

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + P'''\cos\alpha''' + \text{etc.} = X,$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + P'''\cos\beta''' + \text{etc.} = Y,$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + P'''\cos\gamma''' + \text{etc.} = Z,$$

on aura d'abord ces trois équations :

$$X - R\cos\alpha = 0,\quad Y - R\cos\beta = 0,\quad Z - R\cos\gamma = 0;$$

d'où l'on tire (en observant qu'on a $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$)

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

pour la quantité de la résultante. On aura ensuite, pour les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ que sa direction fait avec les trois axes,

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

En second lieu, nommant $x$, $y$, $z$ les trois coordonnées de l'un quelconque des points de cette direction, et faisant, pour abréger,

$$P'(z'\cos\beta'-y'\cos\gamma')+P''(z''\cos\beta''-y''\cos\gamma'')$$
$$+P'''(z'''\cos\beta'''-y'''\cos\gamma''')+\text{etc.}=L,$$
$$P'(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha')+P''(x''\cos\gamma''-z''\cos\alpha'')$$
$$+P'''(x'''\cos\gamma'''-z'''\cos\alpha''')+\text{etc.}=M,$$
$$P'(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta')+P''(y''\cos\alpha''-x''\cos\beta'')$$
$$+P'''(y'''\cos\alpha'''-x'''\cos\beta''')+\text{etc.}=N,$$

on aura

$$L-R(z\cos\beta-y\cos\gamma)=0,$$
$$M-R(x\cos\gamma-z\cos\alpha)=0,$$
$$N-R(y\cos\alpha-x\cos\beta)=0,$$

ou bien,

$$L-Yz+Zy=0,$$
$$M-Zx+Xz=0,$$
$$N-Xy+Yx=0.$$

Or, si l'on élimine, entre ces trois équations, deux des inconnues $x$, $y$, $z$, on arrivera à cette équation

$$XL+YM+ZN=0,$$

qui ne contient plus d'inconnue, et qui exprime la relation qui doit avoir lieu entre les résultantes partielles X, Y, Z, et les trois moments résultants partiels L, M, N, pour que les trois équations précédentes puissent subsister à la fois, et, par conséquent, pour que toutes les forces du système puissent avoir une résultante.

**107.** Si cette équation de condition a lieu, les valeurs des trois coordonnées $x$, $y$, $z$ se présenteront sous la forme $\frac{0}{0}$, parce que la résul-

tante pouvant être appliquée à tel point de sa direction qu'on voudra, il est impossible que le calcul détermine l'un de ces points plutôt que tout autre. Il ne peut donc donner que leur lieu géométrique, et les trois équations précédentes ne sont autre chose que les équations des trois projections de la résultante sur les plans coordonnés. Par conséquent, l'une de ces équations est une suite nécessaire des deux autres, et l'on n'a, à proprement parler, que deux équations entre les trois indéterminées $x$, $y$, $z$; d'où il suit qu'elles doivent se présenter sous la forme de $\frac{0}{0}$.

**108.** On se donnera donc à volonté l'une de ces trois quantités, et l'on déterminera alors les deux autres au moyen des équations précédentes.

Si l'on suppose, par exemple, $x = 0$, auquel cas on demande le point où la direction de la résultante traverse le plan vertical YAZ, on aura, pour les deux coordonnées de ce point,

$$y = \frac{N}{X}, \qquad z = \frac{-M}{X}.$$

Si l'on suppose $y = 0$, on aura

$$x = \frac{-N}{Y}, \qquad z = \frac{L}{Y}.$$

Si l'on suppose $z = 0$, on aura

$$x = \frac{M}{Z}, \qquad y = \frac{-L}{Z}.$$

direction de la résultante (**106**), mais où X, Y, Z ont les mêmes valeurs, et où je désigne, pour abréger, la somme des produits $Y'z'$, $Y''z''$, etc., par $(Y'z'+)$; et ainsi des autres.

Mais ces trois équations sont à la fois insuffisantes et trop nombreuses; elles peuvent avoir lieu toutes trois, sans qu'il y ait une résultante unique, et il peut y avoir une résultante unique sans qu'elles aient lieu toutes trois, ni même aucune d'elles.

Cela paraît assez clairement à l'inspection même de ces équations comparées à l'équation unique que nous venons de donner; mais on peut encore s'en rendre compte en suivant le raisonnement d'après lequel on les trouve, et en examinant ce qu'elles signifient.

En effet, après avoir réduit toutes les forces appliquées au système à trois groupes de forces parallèles aux trois axes coordonnés, et ces trois groupes à trois résultantes partielles X, Y, Z, parallèles aux mêmes axes, on suppose que ces trois forces doivent se rencontrer en un même point, pour qu'elles puissent se composer en une seule; et pour cela, on exprime que les résultantes partielles prises deux à deux sont à égales distances du plan qui leur est parallèle; ce qui donne les trois équations (A), au moyen desquelles les trois forces doivent en

effet concourir au même point, et, par conséquent, se composer en une seule.

Mais, d'abord, on omet le cas où les trois groupes ne pourraient pas se réduire respectivement à de simples forces, mais se réduiraient à des couples : alors, les trois résultantes partielles étant nulles, les trois équations de condition seraient satisfaites, et pourtant il n'y aurait pas de résultante unique, mais bien un couple résultant. Ainsi, ces trois équations sont insuffisantes.

D'un autre côté, elles exigent trop ; car, en supposant que les trois groupes se réduisent à trois simples forces, on voit qu'il n'est pas nécessaire, pour qu'elles puissent se composer en une seule, qu'elles se rencontrent toutes trois en un même point : il suffirait simplement que deux d'entre elles se rencontrassent, et que la troisième allât rencontrer quelque part la direction de leur résultante. Mais, ce qui est plus remarquable, cela même n'est pas nécessaire ; car les trois forces X, Y, Z peuvent se réduire à une seule, sans qu'il y ait aucune rencontre entre leurs directions dans l'espace : c'est ce qu'on a vu directement au n° 75.

Si l'on veut voir la même chose par notre analyse, soient $a$ la plus courte distance de Y à Z, $b$ celle de Z à X, et $c$ celle de X à Y ;

et pour simplifier, prenons l'axe des $x$ suivant la droite $a$, et celui des $z$ suivant la force Z. On trouvera dans cette hypothèse, $L = 0$, $M = -Xc$, et $N = Xb - Ya$; et l'équation de condition $XL + YM + ZN = 0$ deviendra

$$XYc - XZb + YZa = 0.$$

Or il est évident qu'on peut trouver trois forces X, Y, Z dans une infinité de proportions différentes, qui satisfassent à cette équation, et qui, par conséquent, aient une résultante unique, quelles que soient les distances mutuelles $a$, $b$, $c$ de leurs directions dans l'espace.

Et comme on n'a qu'une seule équation, on voit même qu'on peut se donner à volonté deux de ces forces, et déterminer ensuite la troisième en conséquence de cette équation.

Qu'on suppose, par exemple, les deux forces X et Z représentées par les lignes $a$ et $c$; on trouvera que la troisième force Y doit être représentée par la moitié de $b$. Ainsi, voilà trois forces, entre autres, qui sont situées en trois arêtes, deux à deux non parallèles et non contiguës, d'un même rhomboïde rectangle, et qui pourtant ont une résultante unique; et il est même aisé de voir que cette résultante passe au milieu de la plus courte distance $b$ qui sépare les forces X et Z proportionnelles aux lignes $a$ et $c$.

On peut faire une foule d'autres exemples; il suffit de ne pas se donner deux forces dans le rapport particulier qui, d'après l'équation précédente, rendrait la troisième force infinie.

Au reste, ce qu'on vient de dire pour trois forces rectangulaires dans l'espace s'appliquerait de même à trois forces parallèles à trois axes obliques quelconques; car, relativement à ces axes obliques, si l'on cherchait par la même analyse qu'au n° **106**, la condition générale d'une résultante unique, on trouverait une équation toute semblable à la précédente, et qui, pour le cas de nos trois forces, donnerait également $XYc - XZb + YZa = 0$; d'où l'on tirerait les mêmes conséquences, en observant que, dans cette équation, $a$, $b$, $c$ ne représentent plus les distances mutuelles des trois forces obliques X, Y, Z, mais trois lignes dont chacune va de l'une à l'autre force parallèlement à la troisième.

Si des trois lignes $a$, $b$, $c$, il y en avait deux nulles, sans que la troisième le fût, l'équation précédente serait réduite à un seul terme, qu'on ne pourrait rendre nul, sans faire quelqu'une des trois forces égale à zéro : d'où il résulte que, si trois forces finies sont situées de manière que la direction de l'une d'elles rencontre les directions des deux autres qui ne sont point

en même plan, ces trois forces ne sont jamais réductibles à une seule; résultat qui s'accorde avec ce qu'on a dit à la fin du n° 75.

On voit donc, pour revenir à notre objet, que des trois équations (A) qu'on avait données avant notre théorie, il n'y en a aucune qui soit nécessaire pour la condition qu'on avait en vue, et qu'elles sont tout à fait étrangères à la question dont il s'agit. Mais il y a encore une autre remarque assez curieuse à faire sur ces équations.

Si on les ajoute ensemble, ce qui est assez naturel à cause de leur symétrie, et ce que l'auteur même avait fait, il arrive que la somme de ces trois équations revient précisément à la nôtre $XL + YM + ZN = 0$. Ainsi, l'on avai rencontré par hasard la véritable équation du problème, et il est clair qu'on ne s'en était poin aperçu; car on aurait vu sans doute que, l somme des trois quantités pouvant être null d'une infinité de manières, sans qu'aucun d'elles le soit en particulier, il pouvait y avo une résultante unique, sans qu'aucune des tro équations regardées comme nécessaires fût sati faite; d'où l'on aurait conclu qu'elles n'étaie pas nécessaires, et qu'il fallait les supprim avec l'analyse défectueuse qui y avait condu Mais, avant notre théorie, on ne savait p

précisément en quoi consistait la condition générale d'une résultante unique.

Quoiqu'on ait depuis rectifié cette analyse par celle que j'ai donnée au n° **106**, je n'ai pas cru cette petite discussion inutile, non-seulement parce qu'elle éclaire un point important de la composition des forces, et qu'elle fait voir la fausse supposition sur laquelle on s'appuyait, mais parce que ce paralogisme subsiste encore, et s'est reproduit jusqu'ici dans un ouvrage célèbre où l'auteur des équations (A) paraît l'avoir emprunté.

*Corollaire* VII.

**112.** Lorsqu'on a les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, le moment G du couple résultant est nul, et les forces appliquées au système se réduisent à une seule R dont la direction passe par l'origine.

Et comme le moment G ne peut être nul, à moins que les trois moments résultants partiels L, M, N ne soient nuls à la fois, il s'ensuit que si l'on voulait exprimer que des forces quelconques se réduisent à une seule qui passe en un point donné, il faudrait, en supposant qu'on ait pris ce point pour origine, poser les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$.

*Remarque.*

**113.** Nous terminerons cet article général par un théorème important sur la manière d'estimer les forces suivant une direction donnée, et leurs moments par rapport à un axe donné, lorsque l'on connaît déjà ces forces et leurs moments estimés par rapport à trois axes rectangulaires.

Mais démontrons d'abord la proposition sur laquelle on s'appuie au n° **110**, et dont nous nous servirons encore ici.

Soient deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace. Nommons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les trois angles que fait la première avec les trois axes coordonnés; $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles analogues de la seconde avec les mêmes axes : je dis qu'on aura, pour l'angle $\theta$ que ces deux droites forment entre elles,

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

En effet, transportons, pour plus de simplicité, nos deux droites parallèlement à elles-mêmes jusqu'à l'origine : les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ et l'angle $\theta$ ne changeront pas. Prenons sur la première, à partir de l'origine, une longueur arbitraire $d$, dont l'extrémité aura pour coordonnées $x$, $y$, $z$. Prenons de même sur la seconde une autre longueur quelconque D, dont

l'extrémité aura pour coordonnées X, Y, Z. Si l'on joint ces deux extrémités par une droite H, on aura un triangle dont les trois côtés seront $d$, D et H; et puisque $\theta$ est l'angle compris entre les deux premiers, on aura, comme on le sait,

$$H^2 = d^2 + D^2 - 2dD\cos\theta;$$

mais on a

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$D^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

et $H^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2$.

Substituant dans la première équation, réduisant, et dégageant $\cos\theta$, il vient

$$\cos\theta = \frac{xX + yY + zZ}{d.D},$$

ou bien,

$$\cos\theta = \frac{x}{d}\cdot\frac{X}{D} + \frac{y}{d}\cdot\frac{Y}{D} + \frac{z}{d}\cdot\frac{Z}{D};$$

mais on a évidemment

$$\frac{x}{d} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{d} = \cos\beta, \quad \frac{z}{d} = \cos\gamma,$$

et de même,

$$\frac{X}{D} = \cos\lambda, \quad \frac{Y}{D} = \cos\mu, \quad \frac{Z}{D} = \cos\nu.$$

Donc

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu.$$

Si l'on veut exprimer que les deux droites $d$

et D sont rectangulaires entre elles, il faut poser $\cos\theta = 0$, et, par conséquent,

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0;$$

ce que nous avions supposé au n° **110**.

**114**. Actuellement changeons les lettres $\lambda$, $\mu$, $\nu$, en $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, et considérons une force R dirigée suivant la première droite. Cette force estimée suivant la seconde, ou projetée sur elle, donnera pour sa projection, que je nomme R', $R' = R\cos\theta$, et, par conséquent,

$$R' = R\cos\alpha\cos\alpha' + R\cos\beta\cos\beta' + R\cos\gamma\cos\gamma'.$$

Mais $R\cos\alpha$, $R\cos\beta$, $R\cos\gamma$ expriment les trois composantes de la force R suivant les trois axes; donc, si l'on nomme X, Y, Z ces composantes, on aura plus simplement

$$R' = X\cos\alpha' + Y\cos\beta' + Z\cos\gamma'.$$

Ce qui nous fait voir que, *pour estimer suivant une direction différente de la sienne une force dont on connaît déjà les composantes suivant trois axes rectangulaires, on n'a qu'à prendre la somme de ces composantes multipliées respectivement par les cosinus des angles qu'elles forment avec la direction nouvelle.*

C'est ainsi qu'en Géométrie, pour projeter une ligne sur un axe quelconque, on peut d'a-

bord projeter cette ligne sur trois axes rectangulaires; projeter ensuite ces trois projections sur l'axe donné, et ajouter ensemble ces projections de projections.

**115.** Pareillement, si l'on considère un couple dont le moment soit représenté par une partie G prise sur son axe, et que ce moment décomposé par rapport à trois axes rectangulaires donne les moments respectifs L, M, N, on voit, comme ci-dessus, que pour estimer le moment G par rapport à un axe nouveau qui forme, avec les trois premiers, des angles $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$, il n'y aura qu'à prendre la somme des moments composants L, M, N multipliés par les cosinus respectifs de ces angles; de sorte qu'en nommant G' la valeur relative du moment G, on aura

$$G' = L\cos\lambda' + M\cos\mu' + N\cos\nu'.$$

D'où il résulte que *la somme des moments de tant de forces que l'on voudra, par rapport à un axe quelconque, est égale aux sommes de leurs moments, par rapport à trois axes rectangulaires, multipliées respectivement par les cosinus des angles que ces trois axes font avec le nouvel axe donné.* Ce qui est un théorème tout semblable au précédent.

## DES CONDITIONS DE L'ÉQUILIBRE

*Lorsque le corps ou système sur lequel les forces agissent n'est pas entièrement libre dans l'espace, mais se trouve gêné par des obstacles.*

Nous allons examiner trois cas principaux auxquels il est facile de ramener tous les autres, comme on pourra le voir par la suite.

### I.

*De l'équilibre d'un corps qui n'a que la liberté de tourner en tous sens autour d'un point fixe.*

Les six équations de l'équilibre d'un corps ou système libre sont, comme nous l'avons trouvé ci-dessus,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

**116**. Supposons maintenant qu'il y ait un point fixe dans le système, et qu'on l'ait pris pour l'origine des coordonnées. Il est clair qu'il pourrait alors y avoir équilibre sans que ces six équations fussent satisfaites; car, quoique le point fixe soit par lui-même incapable de produire le moindre effort, il peut néanmoins

anéantir ceux des puissances dont la résultante irait y aboutir, et par là tenir lieu de nouvelles forces dans le système.

Mais, quelles que soient les forces dont un point fixe puisse tenir lieu par sa résistance, il est bien manifeste qu'elles doivent toutes passer par ce même point; que, par conséquent, on peut toujours les y concevoir comme composées en une seule, et imaginer ainsi, à la place du point fixe, une force unique $r$ qui remplace sa résistance, et considérer alors le système comme parfaitement libre dans l'espace.

Les six équations précédentes devront donc avoir lieu si l'on y introduit la nouvelle force $r$.

Or cette force, étant immédiatement appliquée à l'origine, fournira trois nouvelles composantes, $\mathrm{X}$, $\mathrm{Y}$, $\mathrm{Z}$, dans les trois axes, et ne fournira aucun couple nouveau dans les trois plans. Les six équations de l'équilibre seront donc

$$\mathrm{X} + \mathrm{x} = 0, \quad \mathrm{Y} + \mathrm{y} = 0, \quad \mathrm{Z} + \mathrm{z} = 0,$$
$$\mathrm{L} = 0, \quad \mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0.$$

Les trois résultantes partielles $\mathrm{X}$, $\mathrm{Y}$, $\mathrm{Z}$ pourront donc avoir telles valeurs qu'on voudra. Car, en supposant la résistance du point fixe indéfinie dans tous les sens, les trois forces $\mathrm{x}$, $\mathrm{y}$, $\mathrm{z}$ prendront telles valeurs et tels signes qu'on

voudra, et, s'égalant toujours, en quelque sorte, aux trois forces contraires X, Y, Z, appliquées au même point, rendront toujours les trois premières équations satisfaites.

Mais il faudra que les trois moments résultants partiels L, M, N soient toujours nuls d'eux-mêmes, ce qui nous fait voir que, *pour l'équilibre d'un corps qui n'a que la liberté de tourner autour d'un point fixe, il est nécessaire et il suffit que la somme des moments des forces par rapport à trois axes rectangulaires menés par ce point soit nulle d'elle-même relativement à chacun de ces trois axes.*

**117.** Lorsque toutes les forces appliquées au corps sont parallèles, on peut mener par le point fixe deux plans parallèles à leurs directions, et décomposer tous les couples dans ces deux plans. Il suffit donc alors, pour l'équilibre du système, que la somme des moments soit nulle par rapport à deux axes perpendiculaires à ces plans.

Lorsque toutes les forces sont dans un même plan avec le point fixe, tous les couples à l'égard de ce point sont aussi dans ce plan; et il suffit alors que la somme des moments soit nulle par rapport à un seul axe perpendiculaire à ce plan.

*Remarque.*

**118.** Nous savons que les trois équations $L = o$, $M = o$, $N = o$, qui assurent, dans le cas général, l'équilibre du système, expriment d'une autre manière (**112**) que les forces appliquées doivent avoir une résultante unique qui passe par le point fixe. Donc, si l'on avait voulu partir de cette conséquence comme principe, c'est-à-dire regarder d'abord comme évident que les forces appliquées ne peuvent se faire équilibre autour du point fixe, à moins qu'elles n'aient une résultante unique dirigée vers ce point, on en aurait conclu réciproquement que l'on doit avoir pour l'équilibre les trois équations $L = o$, $M = o$, $N = o$; ce qui nous aurait conduits au même résultat.

*Corollaire.*

*De la pression exercée par les forces sur le point fixe.*

**119.** Quoique nous ayons supposé le point fixe susceptible d'une résistance indéfinie en tous sens, cependant, lorsque des forces données se font actuellement équilibre sur cet appui, il n'a besoin que d'une certaine résistance déterminée. Cette résistance actuelle, prise en sens

contraire, est ce que l'on nomme *la pression* qu'il éprouve de la part des forces du système.

Ainsi, pour calculer cette pression, on n'aura qu'à déterminer la force $-r$. Mais l'on a, par les équations ci-dessus, pour ses trois composantes $-\mathrm{X}$, $-\mathrm{Y}$, $-\mathrm{Z}$ dans les trois axes,

$$-\mathrm{X} = \mathbf{X}, \quad -\mathrm{Y} = \mathbf{Y}, \quad -\mathrm{Z} = \mathbf{Z}.$$

D'où il suit que *la pression est égale à la résultante de toutes les forces du système, transportées parallèlement à elles-mêmes au point fixe.*

Et c'est ce qu'il était facile de reconnaître d'abord; car le point fixe ne peut être pressé que par les forces qui s'y sont transportées parallèlement à elles-mêmes, et par les couples qu'elles ont formés à l'égard de ce point; mais puisque ces couples doivent être en équilibre d'eux-mêmes, c'est-à-dire seraient en équilibre quand bien même le corps serait entièrement libre, il s'ensuit qu'ils ne peuvent nullement charger le point fixe, et que, par conséquent, ce point n'est pressé que par la résultante des premières forces.

## II.

*De l'équilibre d'un corps qui n'a d'autre liberté que celle de tourner autour de la ligne qui joint deux points fixes.*

Fig. 36. **120.** Soient A et B (*fig.* 36) les deux points

fixes. Prenons AB pour l'un des trois axes, pour celui des abscisses par exemple, et le point fixe A pour l'origine.

Quelles que soient les forces dont chacun des points fixes puisse tenir lieu par sa résistance, on peut toujours les concevoir comme réduites à deux forces $r$ et $r'$ immédiatement appliquées à ces points, et substituant ainsi à la place des deux points A et B les deux forces respectives $r$ et $r'$ qui remplacent leurs résistances actuelles, considérer le système comme parfaitement libre dans l'espace.

Les six équations de l'équilibre doivent donc avoir lieu en y introduisant les deux nouvelles forces $r$ et $r'$.

Or la force $r$, immédiatement appliquée à l'origine A, donnera trois composantes X, Y, Z dans les axes, et ne donnera aucun couple dans les plans.

La force $r'$, appliquée en B, donnera trois composantes X', Y' Z', la première dans l'axe des abscisses, les deux autres dans les plans respectifs XY, XZ. La force X' qui tombe dans l'axe des abscisses, étant transportée à l'origine, donnera un couple nul; mais les deux forces Y' et Z', transportées à l'origine, donneront deux couples dans les plans respectifs XY, XZ adjacents à l'axe de rotation; et les moments de ces

couples seront (en faisant $AB = a$) $y'a$, $z'a$.

Les équations de l'équilibre seront donc

$$X + x + x' = 0, \quad Y + y + y' = 0, \quad Z + z + z' = 0,$$
$$L = 0, \quad M + z'a = 0, \quad N - y'a = 0.$$

Les cinq quantités X, Y, Z, M, N pourront donc avoir telles valeurs qu'on voudra ; car, en supposant la résistance des deux points fixes indéfinie en tous sens, les quantités $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ auront telles valeurs et tels signes qu'on voudra, et les trois premières équations, ainsi que les deux dernières, seront toujours satisfaites.

Mais il faudra qu'on ait toujours, pour les seules forces appliquées au système, l'équation $L = 0$. Ce qui nous apprend que *les conditions de l'équilibre d'un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe se réduisent à ce que la somme des moments des forces estimés par rapport à cet axe soit nulle d'elle-même.*

*Remarque.*

**121.** Si les deux points A et B n'étaient pas arrêtés en tous sens, mais pouvaient couler ensemble dans la direction AB, comme si on les supposait unis entre eux, et renfermés dans un canal infiniment étroit AB, leurs résistances $x$ et $x'$ dans le sens de l'axe des abscisses seraient

nulles d'elles-mêmes, et l'on aurait encore l'équation $X = 0$; de manière que, lorsque le corps a la liberté de se mouvoir dans le sens de l'axe de rotation, outre la première condition énoncée ci-dessus, il faut encore que la somme des forces décomposées parallèlement à cet axe soit nulle d'elle-même.

*Corollaire.*

*Des pressions exercées par les forces sur les deux points fixes.*

**122.** Ces pressions n'étant autre chose que les deux résistances actuelles $r$ et $r'$ des deux points fixes, estimées en sens contraires, on aura pour déterminer leurs composantes $-x$, $-y$, $-z$; $-x'$, $-y'$, $-z'$ parallèles aux trois axes, les cinq équations

$$X + x + x' = 0,\ Y + y + y' = 0,\ Z + z + z' = 0,$$
$$M + z'a = 0,\quad N - y'a = 0.$$

Mais comme il y a six inconnues, il paraît d'abord que les deux pressions $-r$ et $-r'$ seront indéterminées, ou du moins que l'on pourra disposer à volonté de l'une de leurs six composantes. Cependant, si l'on observe que les deux inconnues $-x$, $-x'$, n'entrent que dans la première équation, on voit que les quatre autres seront déterminées par les équa-

tions restantes. En effet, l'on aura sur-le-champ, par les deux dernières équations,

$$-Y' = \frac{-N}{a}, \quad -Z' = \frac{M}{a};$$

et substituant dans les deux précédentes, on aura

$$-Y = \frac{Ya+N}{a}, \quad -Z = \frac{Za-M}{a},$$

Ainsi, l'indétermination ne portera que sur les deux composantes $-X$, $-X'$, dont la somme seulement sera déterminée par la première équation $X + X + X' = 0$.

Les deux forces $-Y$, $-Z$, perpendiculaires à l'axe de rotation au point A, se composeront en une seule $\sqrt{Y^2 + Z^2}$ perpendiculaire au même axe, et qui fera avec les axes des $y$, $z$ des angles dont les cosinus respectifs seront

$$\frac{-Y}{\sqrt{Y^2+Z^2}}, \quad \frac{-Z}{\sqrt{Y^2+Z^2}}.$$

Les deux forces $-Y'$, $-Z'$, perpendiculaires à l'axe de rotation au point B, se composeront de même en une seule $\sqrt{Y'^2 + Z'^2}$ perpendiculaire au même axe, et qui fera avec les axes des $y$ et $z$ des angles dont les cosinus respectifs seront

$$\frac{-Y'}{\sqrt{Y'^2+Z'^2}}, \quad \frac{-Z'}{\sqrt{Y'^2+Z'^2}}.$$

Ainsi les deux pressions normales à l'axe, aux points respectifs A et B, seront nécessairement déterminées de grandeur et de direction; et, par conséquent, les pressions absolues $-r$ et $-r'$ n'auront que cette indétermination particulière, savoir, qu'il faudra les choisir de telle sorte qu'étant décomposées chacune en deux autres, l'une dans l'axe, et l'autre perpendiculaire à cet axe, les deux forces normales aient les valeurs et les directions que nous venons de donner, et les deux forces situées dans l'axe fassent une somme constante égale à X.

**123**. Pour voir à quoi tient cette indétermination, qui dépend de celle des deux résistances actuelles x, x′ que les points fixes A et B doivent opposer dans le sens de la ligne qui les joint, on peut remarquer que ces deux points, qu'on peut supposer unis par une verge inflexible, se prêtent un appui réciproque; de manière que chacun d'eux a toujours, ou par lui-même, ou par le secours de l'autre, la résistance actuelle dont il a besoin pour l'équilibre, pourvu que la somme de ces résistances soit suffisante. On ne peut donc pas demander, et il est impossible que le calcul détermine des valeurs particulières, pour deux résistances qui, passant tacitement, en tout ou en partie, de l'un à

l'autre point, se confondent en une seule et même résistance.

## III.

### *De l'équilibre d'un corps qui s'appuie contre un plan inébranlable.*

**124.** Prenons ce plan pour celui des $x, y$, que l'on nomme le plan horizontal; et, supposant d'abord que le corps ne s'appuie contre ce plan que par un seul point A, regardons ce point d'appui comme l'origine des coordonnées.

Il est facile de voir que lorsqu'une force presse un point contre un plan, cette force peut toujours se concevoir comme décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire au plan, l'autre située dans ce plan. La première est nécessairement détruite par la résistance du plan, car il n'y a pas de raison pour qu'elle mène le point d'un côté plutôt que d'un autre du plan, et d'ailleurs elle ne peut le mouvoir à travers; mais la seconde obtient tout son effet parce que son action ne peut être altérée par la résistance d'un plan le long duquel elle s'exerce. Le plan résistant ne peut donc détruire que des forces dont les directions lui sont normales, et, par conséquent, sa résistance ne peut faire naître que de telles forces dans le système.

Soit donc z la résistance actuelle du point d'appui dans l'axe des z. Les équations de l'équilibre deviendront :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + z = 0,$$
$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Les trois dernières nous font voir (**112**) que les forces appliquées au corps doivent se réduire à une seule qui passe par l'origine, c'est-à-dire par le point d'appui;

Les deux premières, que cette résultante doit être verticale, c'est-à-dire perpendiculaire au plan fixe;

Et la troisième, $Z + z = 0$, que cette résultante Z peut avoir une valeur quelconque, pourvu qu'elle soit de signe contraire à la résistance z du plan; c'est-à-dire qu'en supposant, comme nous le ferons désormais, que le corps soit placé au-dessus du plan des $x$, $y$, il faut que la force Z ne soit pas positive : sans quoi, tendant à soulever le corps au-dessus du plan, elle n'y ferait naître aucune résistance, et le plan ne servirait à rien pour l'équilibre; de manière qu'il faudrait les mêmes conditions que si le système était parfaitement libre.

**125.** Supposons actuellement que le corps s'appuie par un second point B. Prenons AB pour l'axe des $x$, et le point A pour l'origine.

Le point A fait naître une résistance z dans l'axe même des z. Le point B fera naître une résistance z′ dans le plan $xz$, et donnera dans ce plan un couple dont le moment sera $z'a'$, en faisant $AB = a'$.

Les équations de l'équilibre seront donc

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z + z + z' = 0,$$
$$L = 0, \quad M + z'a' = 0, \quad N = 0.$$

Ces équations nous font voir que l'équation de condition $XL + YM + ZN = 0$ est satisfaite, ainsi que l'inégalité $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} > 0$ (puisque les deux résistances z et z′ ne pouvant être supposées toutes deux nulles, et étant de même signe, la force Z ne peut être nulle). Les forces appliquées au système doivent donc avoir une résultante unique.

Les deux premières équations montrent que cette résultante doit être verticale, c'est-à-dire perpendiculaire au plan fixe; et la troisième, $Z + z + z' = 0$, qu'elle peut avoir telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'elle ne soit pas positive.

Enfin, si l'on cherche les valeurs des deux coordonnées $p$ et $q$ du point O où sa direction doit rencontrer le plan horizontal, comme on a (**108**)

$$p = \frac{M}{Z}, \quad q = \frac{-L}{Z},$$

en mettant à la place des quantités L, M, Z, leurs valeurs tirées des équations précédentes, on aura

$$p = a' \frac{z'}{z+z'}, \quad q = 0.$$

Donc, puisque l'on a $q = 0$, il faut que le point où elle rencontre le plan horizontal tombe sur la ligne des abscisses, c'est-à-dire sur la ligne qui joint les deux points d'appui; et puisque l'on a $p = a' \frac{z'}{z+z'}$, à cause de $\frac{z'}{z+z'}$ toujours $< 1$, on a $p$ toujours $< a'$, et, par conséquent, la direction de la résultante doit toujours tomber entre les deux points d'appui A et B.

**126**. Supposons enfin que le corps s'appuie contre le plan par tant de nouveaux points qu'on voudra, C, D, etc., qui soient tous placés d'un même côté à l'égard de la droite AB, qui est toujours regardée comme l'axe des abscisses $x$. Conservant pour les deux points A et B les dénominations précédentes, nommons $a''$ et $b''$ les deux coordonnées du point C; $a'''$ et $b'''$ celles du point D, et ainsi de suite. La résistance $z''$ du point C, étant transportée à l'origine, donnera deux couples dans les plans verticaux XZ, YZ, dont les moments seront $z''a''$, $z''b''$; la résistance $z'''$ du point D donnera de même deux couples dans les mêmes plans,

et dont les moments seront $z'''a'''$, $z'''b'''$, et ainsi de suite. Les équations de l'équilibre seront donc

$$X = 0, Y = 0, Z + z + z' + z'' + z''' + \text{etc.} = 0,$$
$$L - z''b'' - z'''b''' - \text{etc.} = 0,$$
$$M + z'a' + z''a'' + z'''a''' + \text{etc.} = 0, \quad N = 0.$$

Ces équations nous font voir d'abord, comme dans l'article précédent, que toutes les forces appliquées au système doivent se réduire à une seule, perpendiculaire au plan fixe, et dont la valeur ne soit pas positive.

En second lieu, je dis que sa direction doit rencontrer ce plan dans l'intérieur du polygone formé par les points d'appui A, B, C, D, etc.

En effet, si l'on nomme, comme ci-dessus, $q$ l'ordonnée du point O, où cette résultante rencontre le plan horizontal; comme on a $q = \frac{-L}{Z}$ en mettant pour L et Z leurs valeurs tirées des équations précédentes, on aura

$$q = \frac{z''b'' + z'''b''' + \text{etc.}}{z + z' + z'' + z''' + \text{etc.}}.$$

Or les résistances z, z', z'', z''', etc., étant toutes positives, et les ordonnées $b''$, $b'''$, etc., toutes de même signe, puisque les points C, D, etc., sont, par hypothèse tous placés du même côté de l'axe des abscisses, il s'ensuit que l'ordonnée $q$ sera de même signe que ces

ordonnées, et que, par conséquent, le point O sera, à l'égard de la ligne AB qui joint les deux points d'appui A et B, du même côté que les autres C, D, etc. Donc, puisqu'on aurait pu prendre pour l'axe des abscisses toute autre droite AC, BD, etc., qui, joignant deux points d'appui, laisse tous les autres d'un même côté, on peut conclure que le point O doit se trouver, à l'égard de chacune de ces lignes, du même côté que les autres points d'appui, et, par conséquent, doit tomber nécessairement dans l'intérieur du polygone formé par tous les points d'appui.

*Corollaire.*

*Des pressions exercées par la résultante des forces du système sur les différents points d'appui.*

**127.** Ces pressions, estimées en sens contraire, ne sont autre chose que les résistances $z$, $z'$, $z''$, $z'''$, etc., dont les points d'appui A, B, C, D, etc., ont actuellement besoin pour l'équilibre. On aura donc, pour les déterminer, les trois équations :

$$Z + z + z' + z'' + z''' + \text{etc.} = 0,$$
$$L - b''z'' - b'''z''' - \text{etc.} = 0,$$
$$M + a'z' + a''z'' + a'''z''' + \text{etc.} = 0.$$

Mais comme on n'a que ces trois équations, avec cette seule condition, que les inconnues $z$, $z'$, $z''$, $z'''$, etc., doivent être toutes positives, il s'ensuit que les diverses pressions exercées sur le plan demeurent indéterminées lorsqu'il y a plus de trois appuis, et même lorsqu'il n'y en a que trois, s'ils tombent en ligne droite. Car, en supposant que le troisième point C tombe avec les deux autres A et B sur l'axe des abscisses, l'ordonnée $b''$ devient nulle, et l'inconnue $z''$ disparaissant d'elle-même dans l'équation $L - b'' z'' = 0$, il ne reste plus que deux équations pour calculer les trois inconnues $z$, $z'$, $z''$, qui sont encore indéterminées.

On pourra donc, dans ce cas, se donner à volonté l'une des pressions, et, dans le cas général, se donner les pressions de tous les points d'appui, hors trois. On calculera ensuite ces dernières pressions par les équations précédentes; et pourvu que, dans les différentes hypothèses que l'on fera, le calcul ne mène à aucune pression positive, le problème sera toujours bien résolu.

*Remarque.*

**128.** Mais si nous trouvons, d'après les principes établis ci-dessus, que les pressions sont indéterminées lorsqu'il y a plus de trois points

d'appui, d'un autre côté, en considérant à priori un corps appuyé contre un plan, par un nombre quelconque de points, et tenu en équilibre par une force normale à ce plan, il nous paraît évident que chaque point de contact doit être actuellement pressé, et que, s'il est pressé, c'est avec une certaine force tout à fait déterminée, ce qui serait absurde autrement: et de là résulte une espèce de paradoxe qui ne paraît pas facile à expliquer.

Gardons-nous d'abord d'en conclure, avec d'Alembert, que la théorie connue jusqu'ici est insuffisante pour résoudre le problème en question; car nous allons voir que ce problème est indéterminé par l'hypothèse même que l'on a faite, et que la théorie donne tout ce qu'on peut demander sans se contredire soi-même.

En effet, si l'on fait attention qu'il s'agit, par hypothèse, d'un corps dont la figure est parfaitement invariable, on peut concevoir les points de contact de ce corps, comme unis entre eux par un plan parfaitement inflexible, lequel repose sur les points fixes A, B, C, D, etc. Or, lorsqu'il y a plus de trois points d'appui, ou seulement trois quand ils tombent en ligne droite, il n'est pas difficile de voir que certaines parties des pressions qu'on supposerait exercées par le plan sur ces points, peuvent être ima-

satisfassent ensemble aux trois équations données ci-dessus, de quelque autre manière permise par les mêmes équations, que l'on veuille répartir les forces de pression sur ces différents points, chacun d'eux trouvera toujours, ou dans sa résistance propre, ou dans sa résistance unie avec celle qu'il empruntera des autres points d'appui, la résistance actuelle dont il aura besoin pour détruire la pression qu'on lui suppose.

Il n'en est pas de même dans le cas de deux points d'appui, et dans celui de trois non en ligne droite : les résistances actuelles sont déterminées, et doivent l'être; car chaque point d'appui se trouvant seul à côté de l'autre, ou, dans le second cas, à côté de la ligne qui joint les deux autres, il est visible qu'il ne peut avoir que sa résistance propre, et ne pourrait pas en emprunter des appuis voisins, si elle n'était pas suffisante.

**130.** Le paradoxe que nous venons de résoudre est d'autant plus frappant, que, dans la nature, les pressions exercées par les corps aux différents points de contact sont nécessairement déterminées dans tous les cas, ce qui serait absurde autrement.

Mais tous les corps sont plus ou moins flexi-

bles et élastiques; et lorsqu'ils sont pressés les uns contre les autres par différents points situés dans le même plan, la pression totale se distribue d'une manière particulière en vertu de ces propriétés physiques, et des trois équations données ci-dessus (**127**), auxquelles les pressions individuelles doivent toujours satisfaire: or il faudrait savoir tenir compte de ces propriétés, pour trouver en tout autant d'équations qu'il y a de points de contact, et connaître par là les diverses pressions; et c'est une question très-délicate de Physique, que nous ne chercherons pas à discuter ici.

**131**. Ce que nous avons dit sur l'équilibre d'un corps qui s'appuie contre un seul plan peut aisément s'appliquer à un corps qui s'appuierait contre plusieurs plans à la fois. Chacun de ces plans fera naître aux différents points de contact des résistances normales à sa surface; et, en introduisant dans les six équations de l'équilibre ces nouvelles forces indéterminées, on parviendra facilement aux conditions que doivent remplir les forces immédiatement appliquées.

**132**. Si le corps s'appuie en différents points contre une ou plusieurs surfaces courbes quel-

conques, on pourra supposer qu'il s'appuie sur les plans tangents menés aux surfaces en ces points. Ainsi, connaissant les équations de ces surfaces, on cherchera celles des plans tangents ou des normales aux divers points de contact : on introduira dans les équations de l'équilibre autant de forces indéterminées, dirigées suivant ces normales, et le problème reviendra au précédent.

---

# CHAPITRE III.

## DES CENTRES DE GRAVITÉ.

Jusqu'à présent nous avons fait abstraction de la pesanteur des corps; nous allons voir ici comment on peut avoir égard à cette propriété générale de la matière, afin d'appliquer les principes établis ci-dessus à l'équilibre des corps, tels qu'ils sont dans la nature.

### I.

**133.** On nomme *pesanteur* ou *gravité* cette cause inconnue qui fait descendre les corps vers la terre, lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes.

La pesanteur étant une cause de mouvement, on peut la considérer comme une force.

Cette force pénètre les parties les plus intimes des corps, et agit également sur toutes leurs molécules; car l'expérience prouve que, dans le vide, des corps quelconques de masses

inégales, une balle de plomb par exemple, et le duvet le plus léger, tombent de la même hauteur avec la même vitesse; d'où l'on doit conclure que les molécules d'un corps qui tombe descendent toutes de la même manière que si elles étaient simplement contiguës, sans être liées les unes aux autres. Ainsi, l'action de la pesanteur s'exerce sur toutes les molécules d'un corps, et se fait sentir également à chacune d'elles.

Cependant l'intensité de la pesanteur n'est pas rigoureusement la même pour une même molécule placée dans des lieux différents par rapport au globe terrestre: elle varie à la surface de la terre, depuis l'équateur où elle est la plus petite, jusqu'au pôle où elle est la plus grande: de plus, elle diminue à la même distance de l'équateur, à mesure que la molécule s'éloigne davantage du centre de la terre; et l'on sait qu'elle décroît toujours dans le même rapport que le carré de cet éloignement augmente. Mais pour les molécules des corps que l'on considère ordinairement en Statique, il n'y a pas assez de différence entre leurs distances à l'équateur, ou au centre de la terre, pour que les variations de la pesanteur y soient sensibles. Ainsi, l'on est autorisé à regarder la pesanteur comme une force constante.

La direction de la pesanteur est fort bien représentée par celle d'un fil à plomb en équilibre, ou par la perpendiculaire à la surface des eaux tranquilles.

Cette direction dans le lieu que l'on considère se nomme la *verticale*, et tout plan perpendiculaire à la verticale se nomme le plan *horizontal*.

La surface de la terre, ou plutôt celle des mers, étant à peu près sphérique, les directions de la pesanteur vont à peu près concourir au centre du globe. Ainsi, à mesure que l'on chemine sur la terre, la verticale change aussi bien que le plan horizontal : mais comme les distances dont il s'agit ordinairement dans la Statique sont très-petites à l'égard du rayon de la terre, qui a près de 1 500 lieues, les directions de deux verticales peu éloignées, qui vont à peu près concourir à cette distance, peuvent être regardées comme parallèles, sans erreur sensible.

Nous considérerons donc toutes les molécules égales d'un corps pesant, comme sollicitées par de petites forces égales, parallèles et de même sens, et nous pourrons appliquer aux forces qui proviennent de la gravité tout ce que nous avons dit des forces parallèles appliquées à un assemblage de points liés entre eux d'une manière invariable.

**134.** Et d'abord, nous e
*résultante de toutes les for*
*pesanteur leur est parallèle,*
*ticale;*

En second lieu, qu'*elle*
*somme.*

La quantité de cette rés
l'on nomme le *poids* du co
que le poids d'un corps est p
nombre des molécules qui le com
la quantité de matière qu'il renfe
l'on nomme sa *masse*. Ainsi, l'on di
mot de *pesanteur* ou *gravité*, d'avec
*poids.* La pesanteur désigne, comme no
vons dit, la cause qui attire les corps v
terre; mais le poids désigne la force par
lière qui en résulte pour chacun d'eux; f
qui est proportionnelle à leur masse, et é
à l'effort qu'il faudrait employer pour les s
tenir.

**135.** En troisième lieu, comme nous av
vu que pour les forces parallèles, appliquées
différents points, il y a un *centre*, c'est-à-di
un point unique par lequel passent continuell
ment leurs résultantes successives, lorsque l'o
incline successivement tout le groupe de ce
forces dans diverses positions, il s'ensuit qu'i

existe toujours, pour un corps pesant, un point unique par lequel passe continuellement la direction du poids, lorsque l'on tourne successivement le corps dans diverses positions à l'égard du plan horizontal. En effet, dans les diverses situations qu'on lui donne, les forces de la pesanteur qui animent toutes les molécules ne cessent pas d'être les mêmes, d'agir aux mêmes points, et d'être parallèles, et, par conséquent, leurs résultantes successives ne cessent pas de se couper en un même point.

Ce point unique, par lequel passe toujours la direction du poids, quelle que soit la position du corps à l'égard du plan horizontal, se nomme *le centre de gravité*.

**136**. Si le centre de gravité d'un corps est fixe, il est clair que ce corps sera en équilibre autour de lui dans toutes les situations; c'est-à-dire que si, le faisant tourner autour de ce point, on l'amène dans une situation quelconque, et qu'on l'y laisse, le corps y demeurera : car, dans toutes ces positions, la résultante des forces de la pesanteur passera toujours sur le même point fixe, et son effet sera détruit. C'est pour cela que plusieurs auteurs ont défini le centre de gravité un point tel, que, s'il était fixé, le corps demeurerait en équilibre

dans toutes les positions possibles autour de ce point; mais il est plus convenable de faire voir à priori qu'il y a toujours pour chaque corps un tel point, et, par conséquent, de montrer qu'il y a un centre de gravité, avant de définir le centre de gravité lui-même.

**137**. Puisque le centre de gravité d'un corps n'est autre chose que le centre des forces parallèles de la pesanteur, appliquées à toutes les molécules de ce corps; comme toutes ces forces sont supposées égales, il suit du n° **87**, que *la distance du centre de gravité à un plan quelconque est égale à la moyenne distance de toutes les molécules du corps au même plan.* Par conséquent, la position de ce centre dans les corps ne dépend nullement de la gravité, mais seulement de la manière dont toutes les molécules sont disposées les unes à l'égard des autres.

Aussi quelques géomètres ont-ils cru plus convenable de nommer le centre de gravité, le *centre de masse*, ou le *centre de figure;* mais nous conserverons ici l'autre dénomination, comme étant plus usitée, et comme rappelant mieux l'usage que l'on fait de ce point dans la Statique.

**138**. Comme on peut toujours concevoir

qu'à toutes les forces de la pesanteur qui animent les molécules d'un corps, on ait substitué leur résultante générale, qui produit absolument le même effet, on peut considérer le centre de gravité d'un corps comme un point où toute la masse de ce corps est réunie et concentrée. Ainsi, dans la solution des problèmes, si l'on veut avoir égard à la pesanteur, on pourra regarder chaque corps comme réduit à son centre de gravité, qu'on supposera sollicité par une force égale et parallèle à son poids; et, combinant ensuite ces nouvelles forces avec celles qui sont immédiatement appliquées au système, on trouvera les conditions de l'équilibre d'après les principes donnés dans les chapitres précédents, comme si tous les corps du système étaient dépourvus de pesanteur.

Il ne s'agit donc plus actuellement que de savoir déterminer les centres de gravité des différents corps ou assemblages de corps qui peuvent se présenter.

**139.** Lorsqu'on peut considérer le corps ou le système comme composé de parties dont on connaît en particulier les centres de gravité et les poids respectifs, il est très-facile de déterminer le centre de gravité de ce corps ou système.

Car ce centre n'étant autre chose que le point d'application de la résultante générale des forces de la pesanteur appliquées à toutes les molécules, on peut concevoir que, pour le déterminer, on a d'abord cherché les points respectifs où sont appliquées les résultantes partielles des forces qui agissent sur chaque corps, et qu'ensuite on a cherché le point d'application de la résultante générale de ces diverses résultantes.

Donc, si l'on connaît déjà les centres de gravité respectifs des différents corps, on n'aura qu'à supposer appliquées à ces points des forces parallèles et respectivement égales aux poids de ces corps, et l'on trouvera le centre de gravité du système absolument de la même manière que l'on trouverait le centre de ces forces parallèles.

On pourra donc employer dans cette recherche, ou la composition successive des forces, comme au n° **29**, ou la théorie des moments, comme au n° **86**.

Et puisque la distance du centre des forces parallèles à un plan se trouve en divisant la somme des moments des forces, pris par rapport au plan, par la somme de toutes les forces, il s'ensuit :

Que *la distance du centre de gravité d'un*

*système quelconque de corps, à un plan, est égale à la somme des moments de leurs poids, par rapport au plan, divisée par la somme de tous les poids:* ou (comme les masses sont proportionnelles aux poids) *égale à la somme des moments des masses, divisée par la somme de toutes les masses;* en entendant par le moment d'une masse, le produit de cette masse par la distance de son centre de gravité au plan que l'on considère.

En calculant ainsi les distances du centre de gravité à trois plans quelconques, qu'on pourra supposer rectangulaires entre eux pour plus de simplicité, on trouvera facilement la position de ce point dans l'espace.

**140.** Dans le cas où toutes les masses du système sont égales, on trouve sur-le-champ la distance du centre de gravité à un plan quelconque, en prenant la moyenne distance des centres de gravité de tous les corps à ce plan.

**141.** Lorsque le plan par rapport auquel on estime les moments passe par le centre de gravité du système, la distance de ce centre au plan est nulle; et, par conséquent, *la somme des moments des masses, pris par rapport à un plan qui passe par le centre de gravité du système, est toujours égale à zéro.*

C'est-à-dire que la somme des moments des masses qui sont d'un même côté du plan est égale à la somme des moments des masses qui sont de l'autre côté.

Et réciproquement, *lorsque la somme des moments des masses, par rapport à un plan, est égale à zéro, le centre de gravité du système est dans ce plan.*

Car la distance de ce centre au plan est nulle.

**142**. Il résulte de là que si les centres de gravité de tous les corps que l'on considère sont dans un même plan, le centre de gravité du système sera aussi dans ce plan; et que si les centres de gravité des corps sont sur une même ligne droite, le centre de gravité sera aussi sur cette droite.

Car, dans le premier cas, tous les corps ayant leurs centres de gravité dans un même plan, les moments de leurs masses par rapport à ce plan sont tous nuls; la distance du centre de gravité du système à ce plan est donc nulle aussi, et, par conséquent, ce centre est dans le même plan.

Dans le second cas, tous les centres de gravité étant en ligne droite, si l'on fait passer deux plans quelconques par cette droite, les centres

de gravité des différents corps seront à la fois dans ces deux plans. Le centre de gravité du système y sera donc aussi, et, par conséquent, ne pourra se trouver que dans leur intersection, qui est la droite proposée.

Au reste, les deux dernières conséquences que nous venons d'énoncer paraîtront évidentes d'elles-mêmes, en se représentant que l'on cherche le centre de gravité du système par la composition successive des forces ou poids appliqués aux centres de gravité respectifs des différents corps.

**143.** Lorsque tous les centres de gravité des corps sont dans un même plan, comme le centre de gravité du système se trouve déjà dans un plan connu, il suffit, pour déterminer sa position, de chercher ses distances à deux autres plans. Or, si on les prend, pour plus de simplicité, tous deux perpendiculaires sur le premier, les distances des différents centres de gravité à ces deux plans seront les mêmes que leurs distances aux traces de ces plans sur le premier.

Donc, *si dans le plan qui contient les centres de gravité de différents corps, on tire deux droites ou axes quelconques non parallèles, on aura les distances respectives du centre de gravité du sys-*

*tème à ces deux droites, en prenant les sommes respectives des moments de toutes les masses, par rapport à ces droites, et divisant par la somme de toutes les masses.*

(Ayant soin de regarder pour chaque droite, comme positifs, tous les moments des masses qui sont d'un même côté de cette ligne, et comme négatifs les moments de celles qui sont de l'autre côté.)

On trouvera de cette manière à quelle distance, et de quel côté, le centre de gravité du système est placé à l'égard de ces deux axes; et menant alors, aux deux distances trouvées, deux parallèles à ces axes, le centre de gravité sera à leur intersection même.

**144.** Lorsque les centres de gravité de tous les corps sont en ligne droite, comme le centre de gravité du système se trouve déjà sur une ligne connue, il suffit, pour le déterminer, de chercher sa distance à un seul plan. Or, si on le prend, pour plus de simplicité, perpendiculaire sur la ligne des centres, les distances des centres de gravité respectifs à ce plan seront les mêmes que leurs distances au point où le plan coupe la ligne.

Donc, *lorsque plusieurs corps ont leurs centres de gravité respectifs sur une même droite, la*

*distance du centre de gravité du système, à un point quelconque pris sur cette droite, est égale à la somme des moments des masses, par rapport à ce point, divisée par la somme de toutes les masses.*

(En prenant avec un même signe tous les moments des masses qui sont d'un même côté à l'égard du point, et avec le signe contraire les moments de celles qui se trouvent de l'autre côté.)

On saura alors à quelle distance et de quel côté le centre de gravité du système est placé à l'égard du point que l'on a choisi, et si l'on porte ensuite de ce côté, et à partir du point, une longueur égale à la distance trouvée, l'extrémité de cette longueur marquera sur la ligne le centre de gravité lui-même.

**145.** On voit donc combien il est facile de trouver le centre de gravité d'un corps ou système, lorsqu'on connaît ceux des différents corps qui le composent; il nous reste à voir comment on obtiendrait les centres de gravité des corps qui ne seraient pas susceptibles d'une pareille décomposition.

A la vérité, comme on peut toujours regarder un corps comme un assemblage de points matériels qui sont eux-mêmes leurs propres

paraître, au premier coup d'œil, de pure spéculation, il est facile de voir qu'il est, en Statique, ce que la quadrature des aires, ou la cubature des solides est en Géométrie. Comme les résultats que la Géométrie nous donne sont d'autant plus exacts dans l'application, que les figures sont plus semblables à celles que la Géométrie suppose, ainsi dans la détermination des centres de gravité, on trouvera ces points d'autant plus près des lieux que la théorie leur assigne, que les corps seront d'une substance plus homogène, plus uniformément répandue, et terminés par des surfaces plus parfaites.

## II.

### DES CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES.

*Lemme.*

**147.** *Toute figure dans laquelle il se trouve un point tel, qu'un plan quelconque mené par ce point coupe la figure en deux parties parfaitement symétriques, a son centre de gravité en ce point, que l'on nomme ordinairement* le centre de la figure.

En effet, si l'on fait passer un plan quelconque par le centre de la figure, comme ce plan la coupe en deux parties parfaitement

symétriques, il n'y a pas de raison pour que le centre de gravité, qui est un point unique, et dont la position ne dépend que de la figure, se trouve d'un côté de ce plan plutôt que de l'autre; donc il sera dans ce plan: le centre de gravité devant donc se trouver à la fois dans tous les plans que l'on pourrait conduire par le centre de figure, sera en ce point même, qui est la commune intersection de tous ces plans.

**148.** Il résulte de là : 1°. Que le centre de gravité d'une ligne droite est au milieu de sa longueur;

2°. Que le centre de gravité de l'aire d'un parallélogramme quelconque est à l'intersection de ses deux diagonales, ou au milieu de l'une d'elles;

3°. Que le centre de gravité de la solidité d'un parallélipipède est à l'intersection de ses quatre diagonales, ou au milieu de l'une d'elles.

On pourrait encore en conclure que le centre de gravité du contour ou de l'aire d'un cercle est au centre de ce cercle; que le centre de gravité de la surface ou de la solidité d'une sphère est au centre de cette sphère; que celui de la surface ou de la solidité d'un cylindre à bases parallèles est au milieu de son axe; etc.

Mais on remarquera surtout les trois premiers corollaires sur les centres de gravité de la ligne droite, du parallélogramme et du parallélipipède, parce que l'on peut regarder ces figures comme les éléments de toutes les autres.

*Problème* I.

**149.** *Trouver le centre de gravité du contour d'un polygone quelconque, et, en général, d'un assemblage de droites disposées comme on voudra dans l'espace.*

On regardera chaque droite comme concentrée en son centre de gravité, lequel est au milieu de sa longueur; et l'on n'aura plus à considérer qu'un assemblage de points représentés, pour leurs poids respectifs, par les longueurs des lignes dont ils sont les centres de gravité.

On trouvera donc le centre de gravité du système par la composition successive de ces poids, ou par la théorie des moments, comme il a été dit plus haut.

**150.** On pourra souvent, par des considérations particulières, déterminer les centres de gravité plus facilement que par la méthode générale.

S'il s'agit, par exemple, de trouver le centre de gravité du contour d'un triangle, on n'aura qu'à joindre les milieux des trois côtés par trois lignes, ce qui formera un triangle semblable au triangle proposé; et, partageant les angles de ce triangle en deux parties égales par des droites, ces droites se couperont au centre de gravité cherché.

C'est-à-dire que le centre de gravité du contour d'un triangle n'est autre chose que le centre du cercle inscrit au triangle formé par les lignes qui joignent les milieux des trois côtés.

*Problème* II.

**151.** *Trouver le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque, et, en général, d'un assemblage de figures planes et rectilignes disposées comme on voudra dans l'espace.*

Tous les polygones pouvant se décomposer en triangles, nous allons voir d'abord comment on trouve le centre de gravité d'un triangle quelconque. Après quoi, prenant les centres de gravité de tous les triangles qui composent le système proposé, nous n'aurons plus à considérer qu'un assemblage de points donnés de position, et dont les poids respectifs seront représentés par les aires des triangles dont ils

sont les centres de gravité; et le problème se résoudra comme le précédent.

*Du centre de gravité du triangle.*

Fig. 38. **152.** Soit ABC (*fig.* 38) le triangle proposé: considérons sa surface comme composée d'une infinité de tranches parallèles à la base BC. Il est visible que la ligne droite AD, menée du sommet A au milieu D de la base, divisera toutes ces tranches en deux parties égales. Leurs centres de gravité respectifs seront donc tous sur la droite AD, et, par conséquent, celui de leur système, c'est-à-dire celui du triangle, y sera aussi.

Par un raisonnement tout à fait semblable, on ferait voir que le centre de gravité du triangle doit aussi se trouver sur la ligne BE qui serait menée du sommet de l'angle B au milieu E du côté opposé AC.

Le centre de gravité, devant donc se trouver à la fois sur les deux lignes AD, BE, sera nécessairement à leur intersection G.

Mais si l'on joint DE, puisque les points D et E sont les milieux respectifs des côtés CB, CA, la droite DE sera parallèle à AB et en sera la moitié. Or, si DE est moitié de AB, à cause des triangles semblables DGE, AGB, le côté DG sera aussi moitié de son homologue AG.

Donc, DG sera le tiers de AD, et AG en sera les deux tiers.

Donc, *le centre de gravité de l'aire d'un triangle quelconque est situé sur une ligne menée de l'un quelconque des trois angles au milieu de la base opposée, et se trouve au tiers de cette ligne à partir de la base, ou aux deux tiers à partir du sommet de l'angle.*

La démonstration précédente est si naturelle et si simple, que nous n'avons pas cru devoir l'omettre ici. On pourrait lui donner toute la rigueur possible, au moyen de cette méthode connue, dont les exemples sont si multipliés dans les éléments de Géométrie; mais le lecteur peut y suppléer.

Au reste, voici une démonstration nouvelle qui ne laisse rien à désirer du côté de l'exactitude.

**153.** Par le milieu D de la base BC du triangle ABC (*fig.* 39), menez aux deux autres côtés les parallèles DE, DF, qui les rencontrent en E et F : le triangle proposé sera décomposé en un parallélogramme AEDF, et deux triangles DEC, DFB, parfaitement égaux entre eux, et semblables au premier. Fig. 39.

Le moment du triangle ABC, par rapport à une ligne quelconque menée dans son plan,

sera donc égal à la somme des moments du parallélogramme et des deux triangles.

Soit $a$ l'aire d'un de ces triangles, $4a$ sera celle du triangle proposé. Donc, si l'on nomme $x$ la distance du centre de gravité de ce triangle à la base BC, on aura $4ax$ pour son moment par rapport à cette ligne.

Soit $h$ la hauteur du triangle; $\frac{h}{2}$ sera la distance du centre de gravité du parallélogramme à la base; et comme son aire est $2a$, son moment sera $2a \times \frac{h}{2}$, c'est-à-dire $ah$.

Ensuite, les deux triangles BFD, DEC ont visiblement leurs centres de gravité à même distance de la base BC; donc, si l'on nomme $x'$ cette distance, la somme de leurs moments sera $2ax'$.

On aura donc $4ax = ah + 2ax'$, ou bien, en divisant par $4a$,

$$x = \frac{1}{4} . h + \frac{x'}{2}.$$

Si l'on supposait, avec Archimède, que, dans les triangles semblables, les centres de gravité sont des points semblablement placés; alors, comme les dimensions du triangle BFD ou DEC sont moitiés de celles du triangle ABC, on aurait $x' = \frac{x}{2}$; et substituant dans l'équation

précédente, on trouverait sur-le-champ

$$x = \frac{h}{3}.$$

Ce qui fait voir que le centre de gravité du triangle se trouve placé au-dessus de chaque côté, à une distance égale au tiers de la hauteur de l'angle opposé, et que, par conséquent, il est au point déterminé ci-dessus.

Mais on peut parvenir à cette conclusion sans aucune hypothèse: car, puisque l'on a trouvé pour le triangle ABC,

$$x = \frac{1}{4} \cdot h + \frac{x'}{2},$$

$x$ étant la distance de son centre de gravité à la base BC, et $x'$ la distance du centre de gravité du triangle BFD à sa base BD; en imaginant que l'on fasse, dans le triangle BFD, la même construction que l'on a faite dans le triangle ABC, si l'on nomme $x''$ la distance analogue à celle qu'on a nommée $x'$, et si l'on observe que la hauteur du nouveau triangle est deux fois plus petite que celle du premier, on aura

$$x' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{2} + \frac{x''}{2}.$$

Et continuant la même construction, on

trouvera

$$x'' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{4} + \frac{x'''}{2},$$

$$x''' = \frac{1}{4} \cdot \frac{h}{8} + \frac{x^{\text{IV}}}{2},$$

etc., etc.,

$x'''$, $x^{\text{IV}}$, etc., désignant les distances des centres de gravité à la base dans les triangles successifs, distances qui diminuent sans cesse, et dont la dernière peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, puisqu'elle est toujours plus petite que la hauteur du triangle dans lequel on la considère.

On aura donc, en substituant successivement dans la première équation, à la place de $x'$, $x''$, $x'''$, etc., leurs valeurs,

$$x = \frac{h}{4} + \frac{h}{4.4} + \frac{h}{4.4.4} + \text{etc., à l'infini ;}$$

d'où $x = \frac{h}{3}$. Ce qu'il fallait démontrer.

*Remarque.*

**154.** Soient trois masses égales ayant leurs centres de gravité situés aux trois angles res-
Fig. 38. pectifs du triangle ABC (*fig.* 38). Le centre de gravité de ces trois corps sera le même que celui du triangle.

Car, pour trouver celui des trois corps, il n'y a qu'à prendre d'abord le centre de gravité de deux quelconques d'entre eux, celui des deux corps B et C par exemple, lequel est au point D, milieu de BC; ensuite joignant DA, on n'a qu'à diviser cette droite au point G dans la raison réciproque de 2 à 1.

Or cette construction donne aussi le centre de gravité du triangle ABC.

Il résulte de là et du n° **140**, que la distance du centre de gravité d'un triangle à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace, est égale à la moyenne distance de ses trois angles au même plan.

*Centre de gravité du trapèze.*

**155.** Si l'on prolonge jusqu'à leur rencontre les deux côtés du trapèze, on forme deux triangles semblables de même sommet, et qui ont pour bases les deux bases du trapèze: et comme la ligne qui va du sommet commun au milieu de la base inférieure passe au milieu de la base supérieure, il s'ensuit que cette ligne passe à la fois par les centres de gravité des deux triangles, et, par conséquent, par celui du trapèze qui en est la différence. Le centre de gravité du trapèze est donc sur la ligne qui joint les milieux de ces deux bases parallèles: ainsi

il ne reste qu'à trouver sa distance à l'une ou à l'autre de ces bases, ou, si l'on veut, le rapport de ces deux distances.

Nommons $x$ la distance inconnue de ce point à la base inférieure, et H et $h$ les hauteurs des deux triangles semblables. Si l'on représente par $H^2$ l'aire, ou le poids du grand triangle, $h^2$ sera le poids du petit, et $H^2 - h^2$ celui du trapèze. Le moment du premier de ces poids, par rapport à la base inférieure, sera donc $H^2 . \frac{H}{3}$; le moment du second sera $h^2 \left(\frac{h}{3} + H - h\right)$, et le moment du troisième, $(H^2 - h^2)x$. Ainsi, en égalant le premier de ces moments à la somme des deux autres, on aura, pour déterminer $x$, l'équation

$$3(H^2 - h^2)x = H^3 - 3h^2H + 2h^3.$$

Si l'on cherche de même la distance $y$ du centre de gravité à la base supérieure, ou si l'on observe simplement que cette distance $y$ est formée de $(H - h)$ diminuée de $x$, on trouvera

$$3(H^2 - h^2)y = h^3 - 3H^2h + 2H^3.$$

Comparant ces deux équations, membre à membre, et ôtant, d'une part, le facteur commun $3(H^2 - h^2)$, et, de l'autre, le facteur com-

mun $(H - h)^2$, on trouvera, pour le rapport cherché,

$$x : y :: H + 2h : h + 2H;$$

ou bien, mettant à la place des hauteurs H et $h$ des deux triangles, leurs bases B et $b$ qui sont dans le même rapport, on aura la proportion

$$x : y :: B + 2b : b + 2B,$$

d'où résulte ce théorème :

*Le centre de gravité d'un trapèze est sur la ligne qui va du milieu de l'une de ses bases au milieu de l'autre, et il coupe cette ligne dans le rapport des deux sommes qu'on trouve, en ajoutant d'un côté, à la première base, deux fois la seconde, et, d'un autre côté, à la seconde base, deux fois la première.*

On peut tirer de là cette construction très-simple : Prolongez, vers la droite, l'une des deux bases, d'une longueur égale à l'autre ; et celle-ci, vers la gauche, d'une longueur égale à la première ; et menez la ligne qui joint les extrémités de ces deux prolongements ; elle coupera celle qui joint les milieux des deux bases au centre de gravité du trapèze.

On peut remarquer que la proportion précédente ne dépend point de la hauteur du trapèze, mais uniquement du rapport des deux

bases, de sorte qu'elle est la même pour tous les trapèzes possibles de bases proportionnelles.

Si les bases sont égales, on a $x = y$; ce qui doit être, car le trapèze est alors un parallélogramme, dont le centre est également éloigné de ces deux bases opposées.

Si l'une des bases $b$ devient nulle, on a $y = 2x$; et, en effet, le trapèze devient un triangle dont la base est B, et dont le centre est deux fois plus près de la base que du sommet.

### *Problème* III.

**156.** *Trouver le centre de gravité de la solidité d'un polyèdre quelconque, et, en général, d'un assemblage de polyèdres disposés comme on voudra dans l'espace.*

Tous les polyèdres pouvant se décomposer en pyramides triangulaires, nous allons voir d'abord comment on trouve le centre de gravité d'une pyramide triangulaire. Après quoi, prenant les centres de gravité de toutes les pyramides qui composent le système proposé, on n'aura plus qu'à chercher le centre de gravité d'un assemblage de points, représentés pour leurs poids par les volumes des pyramides respectives dont ils sont les centres de gravité; et le problème se résoudra comme il a été dit ci-dessus.

*Du centre de gravité de la pyramide.*

**157.** Soit ABCD (*fig.* 40) une pyramide triangulaire quelconque. Si nous considérons cette pyramide comme composée d'une infinité de tranches parallèles à la base BCD, il est visible qu'une droite menée de l'angle A en un point quelconque de la base couperait toutes ces tranches et la base elle-même, en des points semblablement placés : donc, si cette droite est menée au centre de gravité I de la base, elle passera par tous les centres de gravité des tranches parallèles. Le centre de gravité du système de ces tranches, et, par conséquent, celui de la pyramide, devra donc se trouver sur la droite AI. Fig. 40.

Mais, par un raisonnement tout à fait semblable, on voit que le centre de gravité de la pyramide doit aussi se trouver sur la ligne CH qui serait menée de l'angle C au centre de gravité H de la face opposée : donc il sera nécessairement à l'intersection G de ces deux droites.

Ainsi les deux lignes AI et CH doivent nécessairement se rencontrer ; et c'est ce que l'on voit d'ailleurs, indépendamment de la considération du centre de gravité : car si l'on tire CI, cette droite ira couper le côté BD en son milieu E, puisque le point I est le centre de gravité

du triangle BCD; par la même raison, si l'on tire AH, cette droite ira rencontrer BD au même point E, et, par conséquent, les deux droites AI, CH seront dans un même plan, qui est celui du triangle AEC, et elles se couperont nécessairement.

Actuellement, si l'on remarque que le point I est au tiers de EC, et le point H au tiers de EA (**152**), il est clair qu'en joignant IH, cette droite sera parallèle à AC, et en sera le tiers. Mais si la droite IH est le tiers de AC, à cause des triangles semblables IGH, AGC, le côté IG sera le tiers de son homologue GA, ou bien sera le quart de IA, et AG en sera les trois quarts.

Donc, *le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est situé sur une ligne menée de l'un quelconque des quatre angles au centre de gravité de la base opposée; il est au quart de cette ligne, à partir de la base, ou aux trois quarts, à partir du sommet de l'angle.*

*Remarque.*

**158.** On peut aussi appliquer à la pyramide triangulaire une démonstration analogue à celle que l'on a donnée pour le triangle.

Mais pour cela, considérons d'abord le prisme
Fig. 41. triangulaire : soit ABC*abc* (*fig.* 41) le prisme.

Par le milieu E du côté AB de sa base ABC, conduisons deux plans EF$f$, ED$d$ parallèles aux faces respectives BC$cb$, AC$ca$. Nous décomposerons ce prisme en deux autres, et un parallélipipède.

Si l'on nomme $a$ la solidité de l'un de ces deux prismes, lesquels sont parfaitement égaux, on aura $4a$ pour celle du prisme proposé, et $2a$ pour celle du parallélipipède.

Cela posé, soit $x$ la distance du centre de gravité du prisme total à la face BA$ab$; on aura $4ax$ pour son moment par rapport à cette face. Soit de même, pour les deux prismes partiels, $x'$ les distances de leurs centres de gravité au même plan, distances qui sont parfaitement égales entre elles; on aura $2ax'$ pour la somme de leurs moments. Enfin, nommant $h$ la hauteur de l'arête C$c$ au-dessus du plan parallèle BA$ab$, le moment du parallélipipède sera évidemment $2a\frac{h}{2}$, ou simplement $ah$. On aura donc $4ax = ah + 2ax'$, et, par conséquent, $x = \frac{h}{4} + \frac{x'}{2}$; et si l'on applique mot à mot tout ce qu'on a dit (**153**), on trouvera $x = \frac{h}{3}$.

Ce qui fait voir que le centre de gravité d'un prisme triangulaire est, à l'égard de chaque

face, au tiers de la hauteur de l'arête parallèle à cette face; d'où il est facile de conclure qu'il est sur la ligne $Gg$, qui joint les centres de gravité des deux bases. Et d'ailleurs il est aisé de voir que ce point tombe au milieu I de cette droite $Gg$, que je nommerai pour un moment l'axe du prisme. En effet, imaginez le prisme partagé en un nombre quelconque de prismes égaux par des plans parallèles à la base, et soit $\delta$ la distance du centre de gravité de l'un de ces petits prismes au milieu de son axe. Il est clair que le centre de gravité O de leur système, et, par conséquent, celui du prisme total, se trouvera aussi à la même distance $\delta$ du milieu I de son axe $Gg$. Or, quelque petite que soit la longueur d'un prisme, il est évident que le centre de gravité est toujours dans l'intérieur du solide : donc, puisque la longueur de chaque prisme partiel peut être rendue moindre que toute grandeur donnée, la distance $OI = \delta$ est moindre que tout ce qu'on voudra, et par conséquent nulle.

**159.** Actuellement, soit une pyramide triangulaire ABCD (*fig.* 42). Par le point L, milieu de AC, faites passer la section LMK parallèle à la base BCD, et la section LEF parallèle à la face ABD. Menez KH parallèle à LE, et joignez EH.

Fig. 42.

La pyramide proposée sera décomposée en deux prismes équivalents, l'un dont la base est EDH, l'autre dont la base est LEF, et en deux pyramides triangulaires ALMK, LCEF parfaitement égales entre elles, et semblables à la pyramide proposée.

Cela posé, égalons le moment de la pyramide totale, par rapport à la base BCD, à la somme des moments des deux prismes et des deux pyramides partielles, par rapport au même plan.

Soit $a$ la solidité de l'une de ces deux pyramides, $8a$ sera celle de la pyramide entière; et si l'on nomme $x$ la distance de son centre de gravité à la base, on aura $8ax$ pour son moment.

Soit $h$ la hauteur de la pyramide entière; le prisme dont la base est EDH aura son centre de gravité élevé, au-dessus de la base, de $\frac{1}{2}\frac{h}{2}$; et, comme sa solidité est $3a$, son moment sera $3a\frac{h}{4}$. Le second prisme, dont la base est LEF, aura son centre de gravité élevé au-dessus du plan BCD de $\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}$ (**158**); et, comme sa solidité est $3a$, son moment sera $3a\frac{h}{6}$.

Enfin, si l'on nomme $x'$ la hauteur du centre

de gravité de la pyramide LCEF au-dessus de la base BCD, la hauteur du centre de gravité de la seconde pyramide ALMK sera évidemment $x' + \frac{h}{2}$, et l'on aura, pour la somme des moments de ces pyramides,

$$ax' + a\left(x' + \frac{h}{2}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{ah}{2} + 2ax'.$$

On aura donc, en réunissant,

$$8ax = \frac{3ah}{4} + \frac{3ah}{6} + \frac{ah}{2} + 2ax';$$

réduisant, et divisant par $8a$,

$$x = \frac{7}{32} \cdot h + \frac{x'}{4}.$$

Si l'on supposait que, dans les pyramides semblables, les centres de gravité sont des points semblablement placés, comme les dimensions de la pyramide LCEF sont deux fois plus petites que celles de la pyramide proposée ABCD, on aurait

$$x' = \frac{x}{2};$$

et, substituant dans l'équation précédente, on trouverait

$$x = \frac{1}{4} \cdot h.$$

Ce qui nous ferait voir que, dans toute pyramide triangulaire, le centre de gravité est élevé

au-dessus de chaque face au quart de la hauteur de l'angle opposé; d'où il est facile de conclure qu'il est au point déterminé ci-dessus. Mais on peut parvenir à l'équation précédente sans aucune hypothèse.

En effet, si l'on imagine que l'on ait fait dans la petite pyramide LCEF la même construction que l'on a faite dans la pyramide ABCD, en nommant $x''$ la distance analogue à celle qu'on a nommée $x'$, et observant que la hauteur de la nouvelle pyramide n'est que la moitié de la hauteur $h$ de la première, on aura, comme ci-dessus,

$$x' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2} + \frac{x''}{4},$$

et continuant la même construction dans les pyramides successives, on trouvera

$$x'' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2^2} + \frac{x'''}{4},$$

$$x''' = \frac{7}{32} \cdot \frac{h}{2^3} + \frac{x^{\text{IV}}}{4},$$

etc., etc.,

$x'''$, $x^{\text{IV}}$, etc., désignant les distances successives des centres de gravité des pyramides à la base. Or ces distances diminuent sans cesse, et deviennent plus petites que toute grandeur donnée, puisqu'elles sont toujours moindres

que les hauteurs des pyramides dans lesquelles on les considère. On aura donc, en substituant successivement dans la première équation, à la place de $x'$, $x''$, $x'''$, etc., leurs valeurs,

$$x = \frac{7}{32} h \left(1 + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2^2 4^2} + \frac{1}{2^3 4^3} + \text{etc.}\right),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{1}{4} h;$$

ce qu'il fallait démontrer.

*Remarque.*

Soient quatre masses égales dont les centres de gravité soient placés aux quatre angles d'une pyramide triangulaire : le centre de gravité de ces quatre corps est le même que celui de la pyramide.

Car, pour trouver celui des quatre corps, il n'y aurait qu'à prendre d'abord le centre de gravité de trois quelconques d'entre eux, lequel est au centre de gravité de la face même aux angles de laquelle ils sont placés (154), et joignant ensuite le centre de gravité du quatrième corps à ce point, il faudrait diviser cette droite à partir de la face, en raison réciproque de 3 à 1 : or cette construction donne aussi le centre de gravité de la pyramide.

Il résulte de là que la distance du centre de gravité d'une pyramide triangulaire à un plan situé d'une manière quelconque dans l'espace est égale à la moyenne distance de ses quatre angles au même plan.

La même propriété appartient aussi au prisme triangulaire.

*Remarque générale.*

**160**. Pour déterminer le centre de gravité d'un polyèdre, il n'est pas toujours nécessaire de le décomposer en pyramides triangulaires; il se présente souvent des simplifications dont il faut profiter.

Par exemple, on trouvera le centre de gravité d'un prisme quelconque à bases parallèles en prenant le centre de gravité de la section parallèle aux bases, menée entre elles à égales distances, ou bien, en prenant le milieu de la ligne qui joint les centres de gravité de ces deux bases.

Cette proposition est si facile à démontrer directement, ou à déduire de ce que nous avons dit sur le prisme triangulaire, qu'il est inutile de s'y arrêter.

**161**. Si l'on considère un cylindre quelconque à bases parallèles comme un prisme

dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, il résulte de ce que nous venons de dire que le centre de gravité de ce cylindre est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité de ses deux bases.

**162.** On a pu voir précédemment que le centre de gravité d'une pyramide triangulaire est le même que le centre de gravité de la section parallèle à la base, menée au quart de la hauteur du sommet.

Cette propriété s'étend à une pyramide quelconque; car si l'on partage la base en triangles par des diagonales, et que l'on conduise des plans par ces lignes et par le sommet, on décomposera la pyramide proposée en autant de pyramides triangulaires qu'il y a de triangles dans la base. Toutes ces pyramides auront une même hauteur, qui est celle de la proposée, et, par conséquent, leurs solidités respectives seront proportionnelles à leurs bases ou à des sections parallèles faites à même hauteur. Donc, si l'on coupe toutes ces pyramides par un plan parallèle au plan de leurs bases, mené au quart de la hauteur du sommet commun, puisque leurs centres de gravité respectifs sont les mêmes que ceux des sections triangulaires correspondantes, et que leurs solidités (ou leurs poids)

sont proportionnels à ces sections, il s'ensuit que le centre de gravité du système de ces pyramides est le même que celui de tous les triangles ou du polygone qui résulte de leur assemblage.

Mais, si l'on tire une ligne droite du sommet au centre de gravité de ce polygone, cette droite ira passer au centre de gravité de la base, et sera coupée par le plan du polygone aux trois quarts de sa longueur en partant du sommet, ou au quart, en partant de la base.

**163.** Donc *le centre de gravité d'une pyramide à base quelconque est sur la ligne menée du sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne en partant de la base, ou aux trois quarts en partant du sommet.*

**164.** En considérant le cône comme une pyramide dont la base est un polygone d'une infinité de côtés, on voit que le centre de gravité d'un cône à base quelconque est sur la ligne qui joint le sommet au centre de gravité de la base, au quart de cette ligne à partir de la base, ou aux trois quarts à partir du sommet du cône.

*Centre de gravité du tronc de pyramide.*

**165.** On voit d'abord que le centre de gra-

vité d'un tronc de pyramide est sur la ligne qui joint les centres de gravité de ses deux bases : car supposez rétablie la pyramide entière dont on a retranché une pyramide semblable, par une section parallèle à la base, pour former le tronc dont il s'agit. Comme la ligne qui va du sommet au centre de gravité de l'une des bases passe au centre de gravité de l'autre, il s'ensuit que cette ligne passe à la fois par les centres de gravité des deux pyramides semblables, et, par conséquent, par celui du tronc qui en est la différence. Ainsi, il ne reste qu'à trouver la distance de ce point à l'une ou à l'autre base, ou, si l'on veut, le rapport de ces deux distances.

Or, soit $x$ la distance de ce centre à la base inférieure, et nommons H et $h$ les hauteurs des deux pyramides semblables. Si l'on représente par $H^3$ le volume ou le poids de la grande pyramide, $h^3$ sera le poids de la petite, et $H^3 - h^3$ celui du tronc : et les trois moments de ces poids par rapport à la base inférieure seront $H^3 . \frac{H}{4}$, $h^3 \left(\frac{h}{4} + H - h\right)$ et $(H^3 - h^3)\,x$. Donc, en égalant le premier de ces moments à la somme des deux autres, on aura, pour déterminer $x$, l'équation

$$4(H^3 - h^3)\,x = H^4 - 4h^3 H + 3h^4,$$

dont le premier membre est divisible une fois, et le second deux fois par $(H - h)$, qui est la hauteur du tronc.

Si l'on cherche de même la distance $y$ du centre de gravité à la base supérieure, ou si l'on observe simplement que $y$ est composée de $H - h$ diminuée de $x$, on trouvera l'équation

$$4(H^3 - h^3)y = h^4 - 4H^3h + 3H^4,$$

dont le premier membre est divisible de même par $H - h$, et le second par $(H - h)^2$.

Comparant donc ces deux équations, et supprimant les facteurs communs, on aura, pour le rapport cherché, $x : y :: H^2 + 2Hh + 3h^2 : h^2 + 2hH + 3H^2$ : ou bien, comme dans les pyramides ou les cônes semblables, les bases sont proportionnelles aux carrés des hauteurs; si l'on met pour $H^2$ et $h^2$ les deux bases B et $b$ du tronc, et, par conséquent, pour $Hh$ une base $\sqrt{Bb}$ moyenne géométrique entre les deux, on aura la proportion

$$x : y :: B + 2\sqrt{Bb} + 3b : b + 2\sqrt{Bb} + 3B;$$

d'où résulte ce théorème :

*Le centre de gravité d'un tronc de cône ou de pyramide est sur la ligne qui va du centre de gravité de l'une des bases au centre de gra-*

*vité de l'autre; et il coupe cette ligne dans le rapport des deux sommes qu'on trouve, en prenant d'un côté : une fois la première base, deux fois la moyenne géométrique entre celle-ci et la seconde, et trois fois la seconde; et d'un autre côté, dans l'ordre inverse, une fois la seconde base, deux fois la moyenne et trois fois la première.*

Au reste, on voit qu'il n'est pas nécessaire ici de mesurer ces bases (dont la quadrature pourrait être longue, ou même assez difficile dans le cas d'une base courbe), mais qu'il suffit d'avoir trois quantités qui leur soient proportionnelles, et, par conséquent, de prendre dans les deux bases semblables du tronc proposé, deux lignes homologues A et $a$, de faire les carrés $A^2$ et $a^2$, et le rectangle $Aa$ qui sera moyen géométrique entre eux.

On peut remarquer que, dans la proportion précédente, le rapport de $x$ à $y$ ne dépend point de la hauteur du tronc, mais uniquement du rapport des bases, et que, par conséquent, il est le même pour tous les troncs possibles de bases proportionnelles.

Si les deux bases du tronc sont égales, la proportion donne $x = y$; et, en effet, le solide devient alors un prisme ou un cylindre dont le centre est également éloigné des deux bases.

Si l'une des bases $b$ est nulle, on a pour la distance $x$ du centre à l'autre base B, $3x = y$ : et, en effet, le tronc dont il s'agit devient alors une pyramide ou un cône, dont le centre est trois fois plus près de la base que du sommet.

On pourrait multiplier les exemples, mais ce que nous avons dit suffit pour l'objet que nous nous sommes proposé. Nous terminerons ce chapitre par quelques propriétés remarquables des centres de gravité.

*Propriétés générales du centre de gravité.*

I.

**166.** Lorsque des forces P, Q, R, S, etc. (*fig.* 43), dirigées comme on voudra dans l'espace, se font équilibre autour d'un même point A, on sait que ces forces, estimées suivant une droite quelconque AX passant par ce point, doivent aussi se faire équilibre. Fig. 43.

Donc, si ces forces sont représentées par les parties AP, AQ, AR, AS, etc., de leurs directions, la somme de leurs projections A$p$, A$q$, A$r$, A$s$, etc., sur l'axe AX, doit être égale à zéro, en comptant comme positives les projections qui tombent d'un même côté du point A, et comme négatives celles qui tombent de l'autre

côté. Mais si l'on menait par le point A un plan MN perpendiculaire à AX, les projections A*p*, A*q*, A*r*, etc., exprimeraient les distances des extrémités des forces au plan MN; donc, puisque leur somme est nulle, la moyenne distance de ces points au plan MN est aussi nulle.

Donc, *lorsque tant de forces que l'on voudra sont en équilibre sur un point, ce point est le centre de gravité de corps ou points massifs égaux qui seraient placés aux extrémités des lignes qui représentent les forces en grandeurs et en directions.*

Et réciproquement, *si l'on considère un assemblage quelconque de masses égales, et qu'on mène de leurs différents centres, des lignes au centre de gravité du système, il est visible que des forces représentées en grandeurs et en directions par ces lignes se feraient équilibre entre elles.*

Car la moyenne distance des extrémités de ces forces à un plan quelconque passant par le centre de gravité, serait nulle; la somme de ces forces estimées suivant un axe quelconque passant par ce point serait donc nulle aussi, et, par conséquent, il y aurait équilibre.

On voit par là que si trois forces sont en équilibre sur un point, ce point est le centre de

gravité du triangle formé par les droites qui joindraient les extrémités des lignes qui représentent ces forces en grandeurs et en directions; car le centre de gravité du triangle est le même que celui des trois corps égaux dont les centres seraient placés aux trois angles.

Et de même, si quatre forces sont en équilibre autour d'un point, ce point est le centre de gravité de la pyramide triangulaire formée par les six droites qui joignent les extrémités des lignes qui représentent les quatre forces en grandeurs et en directions.

Et réciproquement, il y a équilibre entre trois forces exprimées par les distances des trois angles d'un triangle quelconque, au centre de gravité de ce triangle; et de même, entre quatre forces représentées par les distances des quatre coins d'une pyramide triangulaire quelconque, au centre de gravité de cette pyramide.

Mais voici une conséquence plus générale: si l'on suppose que toutes les molécules égales d'un corps de figure quelconque soient attirées vers un même point par des forces proportionnelles à leurs distances à ce point, et qu'il y ait équilibre, ce point sera nécessairement le centre de gravité du corps.

Et réciproquement, si le point vers lequel

toutes les molécules sont attirées proportionnellement à leurs distances est le centre de gravité du corps, il y aura équilibre; et le corps ne pourra prendre aucun mouvement en vertu de ces attractions.

C'est le cas de la terre supposée sphérique et homogène : car, dans la loi de Newton, si une molécule située au dehors du globe est attirée en raison inverse du carré de sa distance au centre, on trouve que, dans l'intérieur, chaque molécule pèse vers le centre en raison de la simple distance. Ainsi, toutes les forces de la gravité se font équilibre autour du centre de la terre.

Au reste, je ne donne ce corollaire que comme le résultat mathématique d'une simple hypothèse, et non pas comme une preuve de l'équilibre de la terre en vertu des différents poids de toutes ses parties; car il est manifeste que cet équilibre a lieu dans la nature, mais par une autre raison générale qui ne dépend ni de la proportion ni de la direction des forces de la gravité. Et, en effet, si le poids de chaque particule de la terre vient de l'attraction que toutes les autres exercent sur elles; comme, entre deux particules égales, l'action est nécessairement égale et réciproque, il s'ensuit que le poids de chaque particule est la résultante d'une infinité

de forces dont chacune a son égale et contraire dans le système, et que, par conséquent, toutes ces résultantes ou tous ces poids doivent se faire équilibre entre eux, quelles que soient d'ailleurs et la forme et la constitution de notre globe, et même la loi d'attraction qui pourrait exister entre les parties de la matière.

## II.

Désignons par M + 1 le nombre des forces P, Q, R, S, etc., qui se font équilibre autour du point A, et considérons toujours les M + 1 corps ou points massifs égaux placés aux extrémités des lignes qui représentent ces forces.

Le point A étant le centre de gravité de tous ces corps, il est clair que si la ligne PA, qui va de l'un d'eux au point A, est prolongée d'une quantité AG égale à la M^e partie de sa longueur, le point G sera le centre de gravité des M autres corps. Mais toutes les forces P, Q, R, S, etc., étant en équilibre, l'une d'elles P est égale et directement opposée à la résultante des M autres Q, R, S, etc. Donc on a ces théorèmes :

1°. *La résultante de* M *forces représentées par autant de lignes qui partent d'un même point* A *est dirigée de ce point vers le centre de gravité* G *de* M *corps égaux qu'on supposerait placés aux extré-*

fixe. Ainsi, comme au dedans de la terre supposée sphérique et homogène, les molécules pèsent vers le centre en raison des simples distances, il s'ensuit que, dans l'intérieur du globe, si un corps est soutenu par son centre de gravité, il restera en équilibre autour de ce point dans toutes les situations. Mais il n'en sera plus de même au-dessus du globe, où l'attraction devient réciproque au carré de la distance; et si le corps, par exemple, est un cylindre droit soutenu par le milieu de son axe, il ne pourra être en équilibre que dans la position où cet axe est horizontal, ou perpendiculaire à l'horizon.

Comme, dans la nature, les forces de la gravité ne sont, ni exactement parallèles, ni exactement convergentes, ni dans les rapports précis qu'on vient de dire, on voit qu'à la rigueur il n'y a point dans un corps pesant de vrai centre de *gravité*, je veux dire, de point unique autour duquel les forces de la gravité se contre-balancent pour toutes les situations possibles du corps. Mais dans les corps de peu d'étendue que nous considérons sur la terre, le point que nous avons déterminé jouit à très-peu près de cette propriété, et l'erreur est insensible.

## III.

Tout ce qu'on vient de dire de plusieurs points massifs égaux, et des forces représentées par leurs distances à un même point de l'espace, s'applique naturellement à un système de points ou corps inégaux, dont les masses seraient $m$, $m'$, $m''$, etc.; car il suffit de considérer chacun de ces corps, tel que $m$, comme un groupe de $m$ points égaux, et de prendre pour la force appliquée à ce corps, $m$ fois la distance de son centre au point dont il s'agit.

Ainsi, en nommant $r$, $r'$, $r''$, etc., les distances des centres des corps $m$, $m'$, $m''$, etc., à ce point ou foyer commun A, et faisant $m + m' + m'' + \text{etc.} = \text{M}$, on peut dire que le centre de gravité G de tous ces corps se trouve sur la direction de la résultante des forces $mr$, $m'r'$, $m''r''$, etc., et à la M^e partie de la ligne qui la représente.

Nommons R cette distance du centre G au point A : X, Y, Z les trois coordonnées rectangles de G par rapport au même point; et soient de même $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$, etc., les coordonnées de $m$, $m'$, etc. Les forces $mx$, $my$, $mz$; $m'x'$, $m'y'$, $m'z'$, etc., seront les composantes des forces $mr$, $m'r'$, etc.; et MX, MY, MZ, celles de

la résultante MR. On aura donc

$$\begin{aligned} MX &= mx + m'x' + m''x'' + \text{etc.}, \\ MY &= my + m'y' + m''y'' + \text{etc.}, \\ MZ &= mz + m'z' + m''z'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

Faisant les carrés, ajoutant, et observant qu'on a

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= R^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= r'^2, \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} M^2R^2 = {} & m^2r^2 + m'^2r'^2 + m''^2r''^2 + \text{etc.} \\ & + 2mm'(xx' + yy' + zz') + \text{etc.} \\ & + 2mm''(xx'' + yy'' + zz'') + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Au lieu du terme $2mm'(xx' + yy' + zz')$, on pourrait mettre, comme on l'a vu n° **113**, le terme $2mr.m'r' \cos\varphi$; $\varphi$ étant l'inclinaison mutuelle des deux lignes $r$ et $r'$, et ainsi des autres; d'où l'on tire en passant ce théorème connu :

*Le carré de la résultante de tant de forces qu'on voudra appliquées sur un point est égal à la somme des carrés de ces forces, et des doubles produits qu'on peut faire en les multipliant, deux à deux, l'une par l'autre et par le cosinus de leur inclinaison mutuelle.*

On peut encore transformer chaque terme

$2mm'(xx' + yy' + zz')$ d'une autre manière; car, si l'on désigne par $\alpha$ la distance de $m$ à $m'$, on a

$$\alpha^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

et, par conséquent,

$$2(xx' + yy' + zz') = r^2 + r'^2 - \alpha^2;$$

on a de même, en nommant $\beta$ la distance de $m$ à $m''$,

$$2(xx'' + yy'' + zz'') = r^2 + r''^2 - \beta^2,$$

et ainsi des autres. En substituant ces valeurs, on aura cette nouvelle expression du carré de la résultante MR,

$$\begin{aligned} M^2R^2 = m^2r^2 + m'^2r'^2 + m''^2r''^2 + \text{etc.} \\ + mm'(r^2 + r'^2 - \alpha^2) + \text{etc.} \\ + mm''(r^2 + r''^2 - \beta^2) + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{aligned}$$

Or, dans le second membre de cette équation, $r^2$ est multiplié par $m^2 + mm' + mm'' + \text{etc.} = m(m + m' + m'' + \text{etc.}) = mM$; le carré $r'^2$ est multiplié de même par $m'M$, etc.; donc enfin, en réduisant, on aura cette équation remarquable:

$$M^2R^2 = M\int(mr^2) - \int(mm'\alpha^2),$$

où le signe $\int(mr^2)$ indique la somme des produits des masses par les carrés des distances de leurs centres au point A; et le signe $\int(mm'\alpha^2)$

la somme de leurs produits deux à deux par les carrés des distances mutuelles de ces centres.

Par cette formule, qui ne contient plus que les distances mutuelles des corps, et leurs distances à un point quelconque A de l'espace, on peut trouver à quelle distance R de ce point A est situé le centre de gravité G du système; de sorte qu'en cherchant ainsi cette distance par rapport à trois points donnés, on aurait la position du point G dans l'espace.

Si le point A change de position, ces distances R et $r$, $r'$, $r''$, etc., varient; mais les distances mutuelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, etc., des différents corps ne changent point par hypothèse, et le terme $\int(mm'\alpha^2)$ est constant: donc, puisque l'équation précédente nous donne

$$M\int(mr^2) = \int(mm'\alpha^2) + M^2R^2,$$

il s'ensuit que le point A de l'espace pour lequel $\int(mr^2)$ a la plus petite valeur est celui pour lequel on a $R = 0$, et que, par conséquent, ce point est le centre de gravité G du système.

Ainsi, *le centre de gravité d'un système de corps jouit de cette propriété, que la somme des produits des masses par les carrés des distances de leurs centres respectifs à ce point est un* minimum, *c'est-à-dire est plus petite que pour tout autre point de l'espace.*

Quant à cette valeur *minimum* de $\int(mr^2)$, on voit, par l'équation ci-dessus où l'on fait $R = 0$, qu'elle est égale à la somme des produits qu'on peut faire en prenant les masses deux à deux, les multipliant l'une par l'autre et par le carré de leur distance mutuelle, et divisant le tout par la masse entière du système; ce qui donne un second théorème qui peut être utile dans plusieurs occasions.

Si le point A, en variant de position, reste toujours sur une sphère décrite autour du centre de gravité du système, R est constante, et, par conséquent, $\int(mr^2)$ ne change point, quoique les distances individuelles $r$, $r'$, $r''$, etc., varient par ce déplacement du point A; et il en serait de même si, le point A restant fixe, le système tournait d'une manière quelconque autour de son centre G.

*Le centre de gravité d'un système jouit donc encore de cette propriété, que si l'on fait tourner comme on voudra le système autour de ce centre, la somme des produits des masses par les carrés de leurs distances à un point fixe quelconque reste toujours la même.*

Si l'on suppose, comme nous l'avions fait d'abord, que toutes les masses $m$, $m'$, $m''$, etc., soient égales entre elles et à l'unité, M en marque le nombre, et l'équation précédente

devient

$$M\int(r^2)=\int(\alpha^2)+M^2R^2,$$

formule plus simple, et qu'on appliquerait également à tous les systèmes possibles, en imaginant que les différents corps y soient tous divisés en parties égales.

Dans le cas de $R=0$, on a $M\int(r^2)=\int(\alpha^2)$, d'où l'on tire ce théorème de Géométrie :

*La somme des carrés des distances mutuelles de* M *points égaux est égale à* M *fois la somme des carrés de leurs distances à leur commun centre de gravité.*

On voit par là que la somme des carrés des six arêtes d'une pyramide triangulaire est égale à quatre fois la somme des carrés des distances des sommets au centre de gravité de la pyramide; car ce centre est le même que celui de quatre corps égaux placés à ces sommets; etc., etc.

Dans ce qui précède, on n'a considéré qu'un système invariable de figure, c'est-à-dire dont les points sont liés de manière qu'aucune de leurs distances mutuelles ne puisse changer. Mais on voit encore ici que, *si la figure du système était variable suivant cette condition, que la somme des carrés des distances mutuelles des différents points fût constante, la somme des*

*carrés de leurs distances au centre de gravité demeurerait aussi constante, et réciproquement.*

Mais je passe à d'autres propriétés des centres de gravité.

## IV.

**167.** Soit une courbe plane quelconque ABC (*fig.* 44), qui tourne autour d'un axe PZ situé dans son plan, de manière que tous les points de la courbe demeurent toujours aux mêmes distances de cet axe; cette courbe engendre une surface que l'on nomme *surface de révolution*. Fig. 44.

Pour en déterminer l'aire, on peut remarquer que chaque élément *ds* de la courbe génératrice produit une surface de cône tronqué dont l'aire est égale au côté *ds* multiplié par la circonférence du cercle que décrit son milieu, ou son centre de gravité *i*, autour de l'axe PZ.

Donc, si l'on suppose tous ces éléments égaux, la surface entière sera égale à leur somme multipliée par la circonférence moyenne entre celles que décrivent tous leurs centres de gravité.

Mais cette moyenne circonférence a pour rayon la moyenne distance de tous ces points à l'axe de révolution, ou bien (**140**) la distance

du centre de gravité de la courbe au même axe. Donc on peut dire :

*Que l'aire d'une surface de révolution est égale à la longueur de la génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe de révolution.*

On voit de la même manière que si plusieurs courbes situées dans le même plan tournent autour d'un axe situé dans ce plan, la somme des surfaces engendrées est égale à la somme des génératrices, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de leur système.

Mais il faut observer que, lorsque la génératrice ou les génératrices ne sont pas situées en entier d'un même côté de l'axe, l'expression précédente ne donne plus que la somme des aires engendrées par les parties qui sont d'un côté de cet axe, moins la somme des aires engendrées par les parties qui sont de l'autre côté.

On peut appliquer aussi la théorie des centres de gravité à la cubature des solides de révolution; et il n'est pas difficile de voir que *le volume d'un solide de révolution est égal à l'aire de la section génératrice multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité autour de l'axe fixe.*

En effet, si l'on considère un rectangle *bcde* (*fig.* 45) qui tourne autour de l'axe PZ parallèle à l'un de ces côtés *be*, il est clair que le solide engendré par ce rectangle est égal à la différence de deux cylindres de même hauteur *cd*, et dont l'un a pour rayon la distance *ca* du côté *cd*, à l'axe fixe, et l'autre, la distance *ba* du côté *be*, au même axe. Ce solide est donc exprimé par $(\varpi \overline{ac}^2 - \varpi \overline{ab}^2)\, cd$, en nommant $\varpi$ le rapport de la circonférence au diamètre. Si l'on met $ca - cb$ à la place de $ab$, l'expression précédente devient $\varpi(2\,ac \times bc - \overline{bc}^2)\, cd$, ou $bc \times cd \times 2\varpi \left(ac - \frac{bc}{2}\right)$, c'est-à-dire égale au rectangle *bcde*, multiplié par la circonférence décrite d'un rayon moyen entre les rayons *ca* et *ba*, ou bien égale à la distance du centre de gravité du parallélogramme à l'axe de révolution. Fig. 45.

Donc, si l'on conçoit la section génératrice ZMN comme partagée en une infinité de petits rectangles égaux, on pourra dire que le solide total engendré est égal à la somme de tous ces rectangles, ou à l'aire de la section ZMN, multipliée par la circonférence moyenne entre toutes celles que décrivent leurs centres de gravité autour de l'axe. Mais cette moyenne circonférence a pour rayon la moyenne distance

de tous ces points au même axe, ou la distance du centre de gravité à cet axe. Donc, etc.

On pourrait voir encore, par un raisonnement à peu près semblable au précédent, que si une surface plane terminée par une courbe quelconque se meut dans l'espace de manière que son plan soit toujours (au même point) perpendiculaire à une courbe quelconque à double courbure, le solide engendré est égal à l'aire de la surface génératrice multipliée par la longueur de la courbe que parcourt son centre de gravité.

Mais nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette proposition, que l'on pourrait déduire, aussi bien que les précédentes, des formules connues pour les centres de gravité; nous ne ferons même aucune application particulière de cette théorie aux surfaces et aux solides dont on a immédiatement la mesure en Géométrie. Notre seul but était de montrer ce rapprochement remarquable de considérations qui paraissent d'abord étrangères entre elles, mais qui s'enchaînent comme toutes les questions soumises aux Mathématiques, et se fondent, pour ainsi dire, les unes dans les autres, lorsqu'on écarte un instant et les idées, et les noms que l'objet particulier de chaque question nous rappelle.

# CHAPITRE IV.

## DES MACHINES.

**168.** On définit ordinairement les machines des instruments destinés à transmettre l'action des forces.

Sous ce point de vue général, tous les corps de la nature sont des machines, parce qu'ils sont propres à transmettre l'action des forces qui leur sont appliquées ; mais lorsque des forces réagissent les unes sur les autres par l'intermédiaire d'un corps ou système parfaitement libre, il est impossible qu'elles se fassent équilibre, à moins qu'elles ne remplissent les conditions que nous avons établies précédemment. Or, au moyen des machines proprement dites, on peut mettre en équilibre des forces quelconques qui ne satisfont pas à ces conditions ; et, par conséquent, pour mieux caractériser les machines, et les distinguer des autres corps, on pourrait les définir des instruments propres à mettre en équilibre des forces de grandeurs et de directions quelconques.

Mais, en suivant cette idée, si des forces in-

capables de se faire équilibre sur un corps entièrement libre peuvent néanmoins se faire équilibre sur une machine, il faut donc en conclure que les corps qui forment les machines ne sont pas entièrement libres, mais sont gênés par des obstacles qui les empêchent d'obéir au mouvement que les forces tendent à leur imprimer, et leur imprimeraient réellement s'ils étaient libres. Ainsi, l'on est conduit naturellement à cette définition générale des machines, savoir, que *les machines ne sont autre chose que des corps ou systèmes gênés dans leurs mouvements par des obstacles quelconques.*

Il n'est pas difficile de comprendre, d'après cela, comment des forces de grandeurs quelconques peuvent se faire équilibre sur de tels corps, car il n'est plus nécessaire que les forces résultantes soient nulles d'elles-mêmes; mais il suffit qu'elles se dirigent vers les obstacles qui les détruisent par leurs résistances. Ainsi, à l'aide d'un corps solide qui s'appuierait, par exemple, contre un point fixe, une force médiocre ferait équilibre à une très-grande force, si elle était disposée à l'égard de celle-ci de manière que leur résultante commune fût dirigée vers le point fixe : d'où l'on voit que la plus petite force seule ne fait pas équilibre à la plus grande, ce qui serait impossible, mais

qu'elle ne sert, en quelque sorte, qu'à détourner l'effort de la plus grande, et à le faire passer avec le sien propre combiné, vers un obstacle invincible.

Au fond, lorsqu'on fait équilibre à une puissance quelconque à l'aide d'une machine, on emploie réellement plus de force qu'en appliquant directement une force égale et contraire à celle qu'on veut détruire, si l'on compte la résistance de l'obstacle pour une force. Mais comme ces résistances qui proviennent des obstacles sont par elles-mêmes incapables de produire du mouvement, et ne peuvent servir qu'à le détruire, nous n'en tenons pas compte, parce que nous ne dépensons réellement que la force appliquée. Au reste, dans la théorie de l'équilibre des machines, rien n'empêche de considérer les obstacles comme tenant lieu des forces égales et contraires à celles qu'ils détruisent actuellement; et si l'on conçoit qu'on ait ainsi substitué à la place de ces obstacles des forces qui représentent leurs résistances actuelles, ce n'est plus entre les seules forces appliquées qu'il y a équilibre, mais entre les forces appliquées et les résistances; de manière que les lois de l'équilibre des machines deviennent les mêmes que celles de l'équilibre des corps parfaitement libres.

C'est d'après cette considération que nous avons trouvé, à la fin du second chapitre, les lois de l'équilibre de corps assujettis à diverses conditions particulières. Ceux qui auront lu cet article verront que nous aurions peu de chose à y ajouter ici, et qu'il renferme de la manière la plus générale la théorie de l'équilibre des trois machines simples auxquelles on peut aisément ramener toutes les autres; mais, en faveur de ceux qui veulent étudier les machines d'une manière plus élémentaire, nous allons entrer dans les détails convenables.

**169.** Nous réduirons les machines simples à trois principales, que l'on peut considérer, si l'on veut, dans l'ordre suivant, eu égard à la nature de l'obstacle qui gêne le mouvement du corps : le *levier*, le *tour*, et le *plan incliné*.

Dans la première machine, l'obstacle est un *point fixe* autour duquel le corps a la liberté de tourner en tous sens.

Dans la seconde, l'obstacle est une *droite fixe* autour de laquelle tous les points du corps n'ont que la liberté de tourner dans des plans parallèles entre eux.

Dans la troisième, l'obstacle est un *plan inébranlable* contre lequel le corps s'appuie, et sur lequel il a la liberté de glisser.

Comme on n'a d'abord considéré cette dernière machine que par rapport aux corps pesants qu'on retient en équilibre sur des plans inclinés à l'horizon, on lui a donné et elle a gardé le nom de *plan incliné*.

Nous parlerons successivement de ces trois machines, et de quelques-unes qui s'y rapportent, dont l'usage est le plus fréquent. Nous ferons abstraction des diverses circonstances physiques qui peuvent influer sur l'équilibre, telles que le frottement des corps les uns sur les autres, et la roideur des cordes au moyen desquelles les forces transmettent leur action aux divers points de la machine. Ainsi l'on supposera que l'action de chaque force se transmet suivant l'axe de la corde à laquelle elle est appliquée, de manière que l'on pourra considérer les cordes comme des fils parfaitement flexibles et inextensibles. On verra facilement dans quels cas et comment on doit avoir égard aux diamètres des cordes. Au reste, nous parlerons plus loin de ces sortes d'instruments qu'on a mis au rang des machines, et qu'on nomme *machines funiculaires*. Ce que nous en avons dit ici suffit pour notre objet.

## DU LEVIER.

**170.** Soient deux forces quelconques P et Q (*fig.* 46), appliquées immédiatement, ou suivant des cordons, aux deux points A et B d'un levier AFB de figure quelconque; soit F le point fixe autour duquel le levier a la liberté de tourner et qu'on nomme ordinairement le *point d'appui* : on demande les conditions de l'équilibre, en faisant d'abord abstraction de la pesanteur du levier.

Fig. 46.

Du point F j'abaisse sur les directions des deux forces P et Q deux perpendiculaires FH, FI, qui rencontrent ces directions, prolongées, s'il est nécessaire, en H et I; et regardant ces deux points comme invariablement liés aux points A et B, je suppose que les deux forces P et Q y agissent immédiatement.

Cela posé, j'applique au point F deux forces contraires, P′ et — P, égales et parallèles à P, et, au même point F, deux autres forces contraires Q′ et — Q, égales et parallèles à Q. Il est clair que le levier reste toujours dans le même état. Mais on peut considérer actuellement, au lieu des deux forces primitives P et Q, 1° deux forces P′ et Q′ respectivement égales et parallèles à ces forces, et de même sens,

mais appliquées en F; 2° deux couples (P, — P), (Q, — Q), dont les bras de levier sont FH et FI.

Or la résultante des deux forces P′ et Q′ est toujours détruite par la résistance du point d'appui, si l'on suppose le levier invariablement lié à ce point, de manière qu'il ne puisse prendre qu'un mouvement de rotation autour de lui. Mais le couple résultant des deux couples (P, — P) et (Q, — Q) ne peut jamais être détruit par ce point fixe (**76**), et, par conséquent, il faut, pour l'équilibre, que ce couple résultant soit nul de lui-même, ou que les deux couples composants (P, — P) et (Q, — Q) soient équivalents et contraires. Ces deux couples doivent donc se trouver dans des plans parallèles, et, par conséquent, dans le même plan, puisque leurs plans se rencontrent déjà au point F. En second lieu, leurs moments P × FH, Q × FI doivent être égaux, et ils doivent tendre à faire tourner en sens contraires.

Donc, *pour l'équilibre du levier, il est nécessaire et il suffit :* 1° *que les deux forces* P *et* Q *qui le sollicitent soient dans un même plan avec l'appui ;* 2° *que leurs moments, par rapport à ce point, soient égaux ;* 3° *qu'elles tendent à faire tourner en sens contraires.*

A l'égalité des moments P × FH = Q × FI,

on peut substituer la proportion P : Q : : FI : FH, qui exprime que les forces P et Q doivent être en raison réciproque de leurs distances au point d'appui.

*De la charge du point d'appui.*

**171.** Dans le cas de l'équilibre, l'appui n'est pressé que par les deux forces P′ et Q′ qui y sont immédiatement appliquées; car les deux couples (P, — P), (Q, — Q) étant en équilibre d'eux-mêmes, c'est-à-dire même en supposant que le levier ne soit pas soutenu, il est clair qu'ils ne peuvent nullement charger le point fixe.

Ainsi, *la pression qu'éprouve le point d'appui est absolument la même que si les deux forces* P *et* Q *s'y transportaient parallèlement à elles-mêmes, sans changer de grandeur ni de sens.*

**172.** Si l'on achève sur les côtés FP′, FQ′ qui représentent les forces P′ et Q′, le parallélogramme FQ′RP′, la diagonale FR représentera donc la charge R de l'appui; et, par conséquent, si la résistance de cet appui n'est pas indéfinie, on pourra juger de quelle résistance il doit être capable, pour n'être pas entraîné par l'action des forces P et Q qui sollicitent le levier.

Comme les forces P′ et Q′ sont parfaitement égales et parallèles aux forces respectives P et Q, et de même sens, les trois côtés et les trois angles du triangle FRQ′, ou du triangle FRP′, représentent les six choses que l'on peut considérer dans le levier, savoir : les deux forces P et Q, la charge R de l'appui, et les inclinaisons mutuelles des directions de ces trois forces.

Donc, si l'on connaît trois quelconques de ces six choses, pourvu qu'il y entre la grandeur de l'une des forces P, Q, R, on pourra trouver les trois autres, de la même manière que l'on résoudrait le triangle FRQ′.

**173.** On observera que tout ce que nous avons dit a lieu, quelles que soient la figure du levier et les dispositions mutuelles des forces P et Q, et du point d'appui.

Si les forces P et Q (*fig.* 47) sont parallèles, on peut mener du point fixe une perpendiculaire commune IH sur leurs directions, et ces deux forces devront être en raison réciproque des parties FH et FI, comprises entre leurs directions et l'appui. Fig. 47.

La charge de ce point sera égale à la somme des forces P + Q, ou à leur différence P — Q, selon qu'elles seront toutes deux de même

sens (*fig.* 47), ou de sens contraires (*fig.* 48).

Lorsque le levier est droit, les parties HF et FI sont proportionnelles aux parties AF et BF, qui sont les distances des points d'application des forces au point d'appui, distances comptées sur le levier lui-même, et que l'on nomme proprement *les bras de levier;* et, par conséquent, dans l'équilibre du levier droit, les forces sont réciproques à leurs bras de levier.

**174.** Si l'on veut considérer l'une des deux forces P et Q, la force P par exemple, comme celle qui tend à donner le mouvement à la machine, et que l'on nommera la *puissance,* et l'autre force Q, comme l'effort qu'il faut vaincre, et que l'on nommera la *résistance,* on pourra distinguer plusieurs espèces de leviers, suivant la place qu'occupe le point d'appui F, relativement à ces deux forces.

Si l'appui tombe entre la puissance et la résistance, on aura le levier de la première espèce
Fig. 47. (*fig.* 47), où la puissance a d'autant plus d'avantage, que son bras de levier AF est plus long.

Si l'appui laisse la résistance Q entre lui et la puissance P, on aura le levier de la seconde
Fig. 48. espèce (*fig.* 48), où la puissance a toujours de l'avantage.

Enfin, si la puissance tombe entre le point d'appui et la résistance, on aura le levier de la troisième espèce (*fig.* 49), où la puissance a toujours du désavantage. Fig. 49.

Mais ces différents leviers reviennent tous au même, sous le rapport de l'équilibre. De quelque manière que la puissance et la résistance soient disposées entre elles et à l'égard du point d'appui, si on les transporte toutes deux parallèlement à elles-mêmes en ce point, il faut toujours que les deux couples qui en naissent soient équivalents et contraires : ainsi les distinctions précédentes sont inutiles dans la théorie, et ne peuvent servir que dans le discours.

**175.** Supposons actuellement que le levier soit sollicité par un nombre quelconque de puissances P, Q, R, etc. (*fig.* 50), toutes situées dans un même plan avec le point d'appui F. En abaissant de ce point les perpendiculaires FH, FI, FK, etc., sur leurs directions, et considérant chaque force P comme transformée en une autre égale, parallèle et de même sens, appliquée en F, et en un couple (P, — P) qui a pour bras de levier la distance FH de cette force au point fixe, on verra, comme ci-dessus, que la résultante de toutes les forces transpor- Fig. 50.

tées sur le point fixe est toujours détruite par sa résistance, mais que le couple résultant doit être nul de lui-même pour l'équilibre, comme si la verge était parfaitement libre : d'où l'on conclura que la somme des moments $P \times FH$, $Q \times FI$, $R \times FK$, etc., doit être égale à zéro, en comptant comme positifs tous les moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens, et comme négatifs les moments qui tendent à faire tourner dans le sens contraire.

On trouvera aussi que la charge du point d'appui est absolument la même que si toutes les forces s'étaient transportées parallèlement à elles-mêmes en ce point, sans changer de grandeur ni de sens.

**176.** Si les forces P, Q, R, etc., agissaient dans des plans différents, on verrait de la même manière qu'en transportant toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes au point fixe, tous les couples qui en proviennent doivent donner un couple résultant nul de lui-même, ou doivent être en équilibre entre eux.

Mais, pour exprimer cette condition, il faut ici trois équations qui expriment que la somme des moments des forces, estimés par rapport à trois axes qui se croisent dans l'espace au point

d'appui, soit nulle d'elle-même à l'égard de chacun de ces axes (**65**).

Sur quoi l'on peut observer que les trois axes peuvent être menés d'une manière quelconque par le point fixe, pourvu qu'ils ne soient pas dans un même plan; car les trois équations précédentes n'assureraient pas alors l'équilibre du corps.

Puisque les couples qui naissent des forces transportées au point fixe doivent être en équilibre d'eux-mêmes, il s'ensuit que les forces appliquées aux divers points du levier doivent se réduire aux mêmes forces, mais réunies parallèlement à elles-mêmes au point d'appui; et, par conséquent, on peut exprimer la loi générale de l'équilibre du levier en disant que les forces appliquées doivent avoir une résultante unique qui passe par le point fixe : proposition qui paraît assez évidente d'elle-même, et dont on part ordinairement comme d'un axiome pour arriver aux conditions précédentes (**116** à **118**).

**177.** Jusqu'ici nous avons fait abstraction de la pesanteur du levier. Si l'on veut y avoir égard, il faudra considérer le poids de la verge comme une nouvelle force appliquée en son centre de gravité, suivant une direction verti-

cale; et lon combinera cette force avec les autres, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, comme si le levier était sans pesanteur. Ainsi, l'on voit que, dans le cas, par exemple, où toutes les forces et la direction du poids du levier se trouvent dans un même plan avec l'appui, c'est la somme de tous les moments, en y comprenant celui du poids, qui doit être égale à zéro pour l'équilibre.

Donc, si l'on veut employer un levier dont le poids n'entre pour rien dans l'équilibre des forces, on n'aura qu'à le placer de telle sorte, que la verticale abaissée de son centre de gravité tombe au point d'appui : alors, le moment du poids étant nul de lui-même, on n'aura plus à considérer que les moments des forces appliquées.

**178.** On a supposé que le point F du levier était arrêté dans tous les sens, de manière que le levier ne pût avoir qu'un mouvement de rotation autour de ce point fixe. Pour se procurer un tel point au dedans d'un corps, on le traverse ordinairement par un essieu ou cylindre inflexible, d'un diamètre quelconque; et lorsque le corps tourne autour de ce cylindre, il est absolument dans le même cas que s'il tournait autour de son axe considéré comme une droite

fixe; et tous les points d'une même section plane qui est faite perpendiculairement à l'axe, et dont il résulte un cercle dans le cylindre, sont dans le même cas que s'ils tournaient autour du centre de ce cercle.

A la vérité, dans la disposition précédente, le levier n'a pas la liberté de pirouetter en tous sens autour du point fixe; mais lorsque les forces qu'on y suppose appliquées sont toutes dans un plan perpendiculaire à l'axe autour duquel il peut tourner, les lois de l'équilibre y sont parfaitement les mêmes. Au reste, on pourrait placer dans la verge une sphère fixe qui la touchât au moins en quatre points, de manière que ces quatre points fussent comme les points de contact d'une pyramide circonscrite à sa surface : le levier alors, en tournant autour de cette sphère, pourrait être considéré comme s'il tournait autour de son centre.

Mais le plus souvent le levier ne fait que poser sur l'appui fixe, comme on le voit *fig.* 46, 47, 48. Alors les conditions données plus haut ne suffisent plus pour l'équilibre, abstraction faite du frottement. Il faut non-seulement que les forces appliquées aient une résultante unique qui passe au point d'appui, mais encore que la direction de cette résultante soit normale à la surface de contact du levier avec l'appui :

car si elle tombe obliquement sur le plan tangent à cette surface, on pourra la décomposer en deux autres, l'une perpendiculaire, et l'autre parallèle à ce plan. La première sera détruite; mais la seconde obtiendra son effet, et fera glisser le levier sur l'appui, comme on le verra à l'article du plan incliné.

### *De la Balance.*

**179.** La balance ordinaire est un levier du premier genre, aux extrémités duquel sont suspendus par des cordons deux bassins destinés à recevoir les corps dont on veut comparer les poids. On dispose ordinairement cette machine de manière que son centre de gravité passe par
Fig. 51. la verticale menée par le point d'appui F (*fig.* 51) et que les bras du levier FA et FB soient parfaitement égaux: alors on est sûr que deux corps graves qui se font équilibre dans les bassins ont des poids parfaitement égaux, et, par conséquent, renferment des quantités égales de matière. Ainsi, en prenant le poids d'un corps pour unité, on évaluera les masses respectives des différents corps en cherchant à combien d'unités de poids ils font équilibre.

Pour qu'une balance soit juste, il faut donc, en premier lieu, que son centre de gravité

tombe dans la verticale menée par le point d'appui.

C'est ce que l'on vérifie sur-le-champ, en examinant si la balance est en équilibre d'elle-même, c'est-à-dire lorsque les bassins sont vides; et si cela n'a pas lieu, on rectifie aisément la balance à cet égard, en attachant à l'un des bassins ou des bras de levier un poids convenable qui rétablisse l'équilibre.

Il faut, en second lieu, que le point d'appui divise le levier ou le *fléau* en deux parties parfaitement égales; et cette seconde condition est la plus importante.

Pour voir si elle a lieu, on n'a qu'à mettre deux corps en équilibre dans les bassins, et les changer ensuite de place. Si les bras de levier sont égaux, l'équilibre doit subsister encore; car les poids qui se sont fait équilibre sont égaux aussi, et il doit être indifférent de les changer de bassins.

Mais si les bras de levier sont inégaux, l'équilibre sera détruit; car les poids qui se sont fait équilibre sont en raison inverse de ces bras de levier: or, en les changeant de place, le plus grand poids agira à l'extrémité du bras de levier le plus long, et, par cette double raison, entraînera nécessairement l'autre.

La balance alors sera fausse, et l'on ne pourra

la rectifier qu'en changeant le point d'appui ou le point de suspension de l'un des bassins.

On pourra néanmoins s'en servir, et connaître par deux épreuves le poids véritable du corps.

Car, soient P le poids inconnu du corps, $x$ et $y$ les deux bras de la balance, et supposons que le poids P, placé dans le bassin qui répond au premier bras de levier $x$, fasse équilibre à un poids connu A placé dans l'autre bassin; on aura

$$Px = Ay.$$

Mettons actuellement le poids P dans le bassin qui répond au bras de levier $y$, et supposons qu'il fasse équilibre à un poids connu B placé dans l'autre; on aura

$$Py = Bx.$$

Multipliant ces deux équations membre à membre, il vient

$$P^2 = AB, \quad \text{d'où} \quad P = \sqrt{AB};$$

c'est-à-dire que le poids du corps est moyen proportionnel géométrique entre les deux poids auquel il fait alternativement équilibre dans les deux bassins de la balance.

*De la Romaine.*

**180.** La balance romaine est aussi un levier droit du premier genre, mais dont les bras FA, FB (*fig.* 52) sont inégaux. Fig. 52.

A l'extrémité A du bras le plus court, on suspend le corps dont on veut trouver le poids Q; on l'attache par un crochet, ou bien on le pose dans un bassin qui est suspendu librement au point A, comme dans la balance ordinaire. Sur l'autre bras FB de la romaine est un poids connu $p$, mobile au moyen d'un anneau le long de ce bras; de sorte qu'en le faisant glisser à une distance convenable FI de l'appui F, il fait équilibre au poids du corps qui agit de l'autre côté.

Si donc, à chaque point I du bras FB, on marquait en nombres le rapport des deux forces Q et $p$ qui se font équilibre, on aurait un instrument fort commode pour peser les différents corps à l'aide d'un même poids $p$ qui servirait d'unité. Il suffirait, dans chaque cas, de chercher le point I où il faut amener le poids mobile $p$ pour contre-balancer le poids Q, et l'on trouverait marqué en ce point le rapport de Q à $p$: ce qui est précisément le poids cherché du corps.

Lorsque la romaine est tellement construite, que le centre de gravité de toute la machine, c'est-à-dire du fléau et du bassin, tombe précisément sur le point d'appui F, la loi de l'équilibre entre les deux forces appliquées est la même que si le levier AC était sans pesanteur. Ainsi, le rapport de Q à *p* est égal à celui des deux bras FI et FA, et, dans ce cas, il est bien facile de construire une *romaine*, c'est-à-dire d'en marquer les différentes divisions.

Mais si le centre de gravité de la machine tombe à droite ou à gauche de l'appui, le rapport de Q à *p* n'est plus celui des bras de levier IF et AF; il doit être augmenté ou diminué d'une certaine quantité qui dépend du poids V de la machine, et de la distance de ce poids V à l'appui : ainsi, les divisions de la romaine doivent être changées. Mais on sent, par ce que je viens de dire, que ces divisions seront encore distribuées de la même manière; seulement le point de départ, c'est-à-dire le point où l'on doit compter zéro pour le poids Q, ne sera plus en F sur l'appui, mais il devra être
Fig. 53. avancé ou reculé en O (*fig.* 53), d'une certaine quantité FO, qu'il est bien facile de déterminer.

**181**. Mais sans connaître ni le poids ni le

centre de gravité de la romaine, on peut en marquer exactement les divisions de la manière suivante, que la théorie des couples rend la plus naturelle et la plus facile à retenir.

Je suppose d'abord le bassin vide, ou le poids Q nul, et je fais avancer le poids mobile $p$ jusqu'en un point O, qui se peut trouver à gauche ou à droite de l'appui, mais qui est tel, que le fléau AB devienne horizontal. Dans cet état, le centre de gravité de tout le système, en y comprenant le poids mobile $p$, passe au point F, et le poids de toute la machine est détruit. C'est donc au point O qu'il faudra marquer zéro, puisque alors le poids Q est tout à fait nul.

Actuellement, je suppose que, dans le bassin vide on mette un poids $p' = p$; il est clair que l'équilibre sera rompu, mais que si l'on éloigne le poids mobile d'une quantité convenable, l'équilibre sera rétabli. Ainsi, quand d'un côté on ajoute au poids, de l'autre côté il faut chercher ce qu'on doit ajouter au bras de levier pour maintenir l'équilibre. Or, qu'on imagine la force $p'$ transportée parallèlement à elle-même du point A au point d'appui F, elle y sera détruite, et il ne restera qu'un couple $(p', -p')$, appliqué sur $FA = r$, et dont le moment est $p'r$. Ainsi, le poids $p'$ qu'on met

dans le bassin vide ajoute de ce côté de la romaine un couple ou moment $pr$ : il faut donc ajouter de l'autre côté un couple égal et contraire $(-p, +p)$ qui ait un même bras de levier $r$. Or qu'on place ce couple, ce qui est permis, sur la ligne $OH = r$ : alors la force $-p$ détruit son égale et contraire $p$, et il ne reste que $+p$, qui n'est en quelque sorte que le poids mobile $p$ qu'on aurait éloigné de la quantité $OH = r$. On voit donc que, pour chaque poids $p$ qu'on ajouterait dans le bassin, il faudrait éloigner le poids mobile de la longueur constante $r$ du petit bras de la romaine; et si l'on ajoutait une fraction quelconque de $p$, il est évident, par la même démonstration, qu'il faudrait éloigner le poids mobile d'une même fraction de $r$.

Donc, à partir du point O déterminé ci-dessus, il faudra porter des parties égales à $r$, et marquer en ces points de division, 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. Et si l'on veut marquer des fractions intermédiaires, des dixièmes, des centièmes, par exemple, on aura un instrument qui pourra servir pour évaluer le poids des corps à ces décimales près du poids connu $p$.

On voit que la balance romaine peut être utile en beaucoup de rencontres où la balance ordinaire ne serait d'aucun usage, puisque

celle-ci exige différents poids pour peser les différents corps, tandis que la romaine n'en exige qu'un seul.

Elle a encore cet avantage, que le point d'appui ou de suspension y est moins fatigué par la charge ou la pression des corps que l'on pèse, car dans la balance ordinaire cette pression est double du poids du corps, ou $2Q$; au lieu que dans la romaine elle est simplement $Q+p$, ou seulement $Q$, c'est-à-dire la moitié de la précédente, si l'on veut regarder le poids $p$ comme faisant lui-même partie du poids total de la machine.

On peut varier cette balance de différentes manières, en rendant mobile, au lieu du poids $p$, le poids $Q$ du corps qu'il s'agit de peser, ou bien le point de suspension du fléau AB, ce qui donnerait lieu à différentes constructions; mais le principe en est toujours le même, et il est inutile de s'y arrêter.

### *Du Peson.*

**182.** On peut encore, pour évaluer les poids, employer un levier coudé ACB (*fig.* 54) mobile autour du point fixe C, et dont les bras CA, CB font entre eux un angle droit ACB; et c'est cette espèce de balance qu'on appelle le *peson*. Fig. 54.

Je suppose, pour plus de simplicité, que le bras CB, au bout duquel le corps est suspendu, soit continué de l'autre côté de l'appui d'une longueur égale CB′; de manière que le centre de gravité de cette branche BB′ tombe précisément au point C qui en est le milieu. Alors le poids du bras CB se trouve détruit dans toutes les positions du levier coudé autour du point fixe, et l'on peut se dispenser d'y avoir égard. Mais, pour l'autre bras CA, son propre poids contribuera, avec celui qu'on pourrait y attacher d'ailleurs, à contre-balancer le poids du corps. Le plus souvent même, ce bras ou cette aiguille est d'une matière assez pesante pour que la force $p$ qui en résulte en son centre de gravité G fasse toute seule l'office du contre-poids. Au reste, je supposerai que $p$ représente le poids total de l'aiguille et des corps qui pourraient y être attachés, et que le commun centre de gravité soit en G, à la distance CG de l'appui.

Cela posé, le peson étant libre, l'aiguille CA tombant dans la verticale CO, et le bras CB étant horizontal, je suspends en B un corps dont le poids est Q; le bras CB s'abaisse vers la verticale, et l'autre CA s'élève: ainsi la distance BH de la force Q à l'appui diminue, et la distance GI de l'autre force $p$,

au même point, augmente; de sorte que le levier coudé, pour se mettre en équilibre, doit prendre une position où les moments $Q \times BH$ et $p \times GI$ soient égaux de part et d'autre.

Or, soient $\varphi$ l'angle ACO que fait l'aiguille avec la verticale, R la distance CG de son centre de gravité à l'appui, et $r$ la longueur du bras CB où le corps est suspendu. Comme on a $GI = R \sin \varphi$, et $BH = r \cos \varphi$, l'équation de l'équilibre devient $p . R \sin \varphi = Q . r \cos \varphi$; ce qui donne

$$\tang \varphi = \frac{r}{R . p} \cdot Q;$$

d'où il résulte (puisque les trois quantités $p$, R et $r$ demeurent invariables) que la tangente de l'inclinaison $\varphi$ de l'aiguille croît précisément en proportion du poids Q du corps.

Si donc on adapte au peson un quart de cercle COAM, qui représente le secteur que l'aiguille peut parcourir depuis la verticale CO jusqu'à l'horizontale CM, il est bien facile de marquer aux différents points de cet arc les nombres qui répondent aux différents poids.

En effet, qu'on mène la tangente indéfinie OT, et qu'on suspende d'abord en B le poids que l'on veut prendre pour l'unité, ce poids

fera monter l'aiguille d'un certain arc AO; et la direction de cette aiguille étant prolongée jusqu'à sa rencontre en $a$, avec la ligne OT, la partie O$a$ représentera la tangente de cet arc qui répond à l'unité de poids. Ainsi, il n'y aura qu'à porter sur la ligne OT, à partir du point O, des parties égales à O$a$, et, par les points de division, tirant des lignes au centre C, on aura, sur le quart de cercle, les points correspondants où il faudra marquer les nombres 0, 1, 2, 3, 4, etc.; et, si l'on veut subdiviser chaque partie de OT en fractions, on aura, par la même construction, les points de l'arc où il faut marquer les mêmes fractions du poids que l'on a pris pour l'unité.

**183.** Quelque petit que soit le poids $p$ de l'aiguille, on voit par la proportion $Q : p :: R \tang \varphi : r$, que ce poids $p$ suffit toujours pour contre-balancer un poids Q aussi grand qu'on le voudra : car la tangente de $\varphi$ peut devenir plus grande que toute quantité donnée. Ainsi, le peson est d'un usage bien plus étendu que la romaine, et, sous un petit appareil, cette machine peut servir à peser les corps les plus considérables.

Mais si la tangente de l'arc $\varphi$ augmente par degrés égaux avec le poids Q du corps, l'arc

lui-même n'augmente que par degrés inégaux qui diminuent sans cesse, et les divisions supérieures du peson deviennent de moins en moins sensibles pour les mêmes accroissements de poids. Par conséquent, si l'on veut que la machine marque plus nettement ces différences, il ne faut pas que le poids de l'aiguille soit trop petit. Aussi, pour peser de lourds fardeaux, on charge l'aiguille d'un certain poids, ce qui lui permet de rester dans la partie moyenne du quart de cercle, où les inégalités de poids sont marqués d'une manière plus sensible.

### *De la Poulie.*

**184.** L'équilibre de la poulie se rapporte naturellement à celui du levier.

La poulie est une roue circulaire ABK (*fig.* 55), mobile dans une chape CN, autour d'un axe C. Une partie AB de sa circonférence est enveloppée par une corde PABQ dont les deux extrémités sont tirées par deux forces P et Q. Si l'on mène les deux rayons CA et CB aux deux points extrêmes de contact, on peut regarder les deux forces P et Q comme appliquées aux extrémités d'un levier coudé ACB, dont les deux bras sont parfaitement Fig. 55.

égaux; et, par conséquent, il faut, pour l'équilibre, que les deux forces P et Q soient parfaitement égales.

Pour la charge du centre C de la poulie, elle est la même (**171**) que si les deux forces P et Q s'y transportaient parallèlement à leurs directions, en P′ et Q′. Ainsi, en achevant sur les deux lignes CP′ et CQ′, qui représentent leurs grandeurs, le losange P′CQ′R, la diagonale CR représentera la charge R du point C.

Mais si l'on joint AB, on formera un triangle isocèle ACB, semblable au triangle P′CR, et, par conséquent, on aura,

$$P' \text{ ou } P : R :: AC : AB.$$

C'est-à-dire que *l'une des deux forces* P *et* Q *appliquées à la corde est à la charge que supporte l'axe de la poulie comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

**185.** Supposons que l'axe, au lieu d'être fixe, soit retenu par une force égale et contraire à la pression qu'il éprouve, et que l'extrémité du
Fig. 56. cordon AF (*fig.* 56), au lieu d'être tirée par la force P, soit invariablement attachée à un point fixe F; l'équilibre de la poulie ne sera point

troublé, et le cordon demeurera toujours tendu de la même manière.

La puissance Q sera donc à la force qui retient le centre de la poulie dans le même rapport que ci-dessus.

Ainsi, en considérant un poids P attaché à la chape CN par un cordon dirigé vers le centre de la poulie, on aurait : *la puissance* Q, *qui tend à faire monter le poids, est à ce poids comme le rayon de la poulie est à la sous-tendante de l'arc embrassé par la corde.*

Lorsque l'arc est égal au tiers de la demi-circonférence, la sous-tendante AB est égale au rayon, et la puissance est égale à la résistance.

Lorsque les deux parties de la corde sont parallèles, la sous-tendante AB (*fig.* 57) est double du rayon, et la puissance n'est que la moitié de la résistance. C'est le cas le plus favorable à la puissance, puisque le diamètre est la plus grande corde du cercle. Fig. 57.

## DU TOUR.

**186.** Le *tour* en général est, comme nous l'avons dit, un corps solide de figure quelconque, qui n'a que la liberté de tourner autour d'un axe fixe.

Mais ce que l'on nomme *tour* ou *treuil* dans les arts est un cylindre aux bases duquel on adapte ordinairement deux autres cylindres de même axe, mais d'un diamètre plus petit, et que l'on nomme *tourillons*. Ces tourillons re-
Fig. 58. posent sur deux appuis fixes F et H (*fig.* 58), et le cylindre, en tournant sur ces tourillons, est absolument dans le même cas que s'il tournait autour de son axe, considéré comme une ligne fixe.

La résistance que l'on se propose de vaincre, ou le poids Q que l'on veut élever, est appliquée à une corde qui s'enroule autour du cylindre, tandis qu'une puissance P le fait tourner, soit en agissant par une corde CP tangentiellement à une roue (CB) perpendiculaire à l'axe de ce cylindre et solidement liée avec lui, soit en agissant à l'extrémité d'une barre qui traverse le cylindre à angle droit, soit au moyen d'une manivelle, etc., etc.

Les dénominations du tour varient suivant l'objet auquel on le destine et suivant sa position. On le nomme ordinairement *tour* ou *treuil* lorsque l'axe du cylindre est horizontal, et *cabestan* lorsque l'axe est vertical et qu'on se sert de barres pour y appliquer la puissance. Mais quels que soient l'objet et la position de cette machine, et de quelque manière qu'on

lui communique le mouvement, les conditions de l'équilibre y sont toujours les mêmes. Ainsi, nous la considérerons, pour plus de simplicité, sous le premier aspect. Nous supposerons que l'axe AB du cylindre soit horizontal, et, par conséquent, le plan de la roue vertical; que la puissance P agisse suivant une direction tangente en un point donné C à la circonférence de la roue, et que la résistance Q agisse dans un plan parallèle à celui de la roue, suivant une direction verticale tangente à la surface du cylindre, ou plutôt à la circonférence de la section circulaire DIO faite dans ce cylindre au point D de contact.

Il s'agit de déterminer d'abord le rapport de la puissance à la résistance dans le cas de l'équilibre, et en second lieu les pressions qu'éprouvent les appuis F et H qui soutiennent les tourillons.

Soient B le centre de la roue, A celui de la section DIO. Menez les rayons CB et DA qui seront perpendiculaires aux forces respectives P et Q.

Je transporte la force Q parallèlement à elle-même du point D au point A. Il en naît une force Q′ égale, parallèle à Q et de même sens, appliquée en A, et un couple (Q, — Q) qui a pour bras de levier le rayon DA du

cylindre. Je transporte de même la puissance P de C en B ; il en naît une force P′ égale, parallèle et de même sens, appliquée en B, et un couple (P, — P) qui a pour bras de levier le rayon CB de la roue.

Les deux forces P′ et Q′, étant appliquées aux deux points A et B qui appartiennent à l'axe fixe du cylindre, sont évidemment détruites par sa résistance.

Mais les deux couples (P, — P) et (Q, — Q) doivent se faire équilibre d'eux-mêmes; car, si l'on transporte, pour plus de clarté, le couple (Q, — Q) dans le plan du couple (P, — P), ce qui est permis, on voit que ces deux couples se composent en un seul qui ne peut jamais être en équilibre autour du centre B de la roue. Le couple résultant doit donc être nul de lui-même, et, par conséquent, les deux couples contraires (P, — P) et (Q, — Q) doivent être équivalents. Ainsi, leurs moments P × CB et Q × DA doivent être égaux, et l'on a P : Q :: DA : CB.

C'est-à-dire que, *pour l'équilibre du tour, il faut que la puissance soit à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue.*

*Des pressions exercées sur les appuis.*

**187.** Les deux couples (P, — P) et (Q — Q) étant en équilibre d'eux-mêmes, il n'y a que les deux forces P′ et Q′ qui puissent charger l'axe fixe, et, par conséquent, les appuis : d'où l'on voit d'abord que la *pression exercée par les forces* P *et* Q *appliquées au treuil est absolument la même que si ces forces étaient transportées sur l'axe, parallèlement à elles-mêmes, dans leurs plans perpendiculaires à cet axe.*

Pour obtenir les pressions individuelles des appuis F et H, on décomposera la force Q′ en deux autres parallèles $q$ et $q'$, appliquées aux points respectifs F et H ; et de même la force P′ en deux autres parallèles $p$ et $p'$, appliquées aux mêmes points. La résultante des deux forces $p$ et $q$ exprimera en grandeur et en direction la pression de l'appui F ; et la résultante des deux forces $p'$ et $q'$ celle de l'appui H.

Nous avons fait abstraction de la pesanteur du treuil. Ordinairement le corps de cette machine est symétrique par rapport à l'axe fixe, et son centre de gravité tombe sur l'un des points de l'axe lui-même. Alors le poids du treuil ne trouble point la proportion établie ci-dessus entre la puissance et la résistance, mais il change

les pressions exercées sur les appuis. Pour connaître les valeurs réelles de ces pressions, on considérera tout le poids du treuil comme une force verticale V appliquée en son centre de gravité G; et si l'on décompose cette force en deux autres parallèles $g$ et $g'$, appliquées aux points F et H, la résultante des trois forces $p$, $q$ et $g$ exprimera la charge réelle de l'appui F, et la résultante des trois forces $p'$, $q'$ et $g'$, celle de l'appui H; de sorte que l'on saura de quelles résistances les deux points d'appui doivent être au moins capables, pour n'être pas entraînés par les efforts combinés des deux forces P et Q, et du poids V de la machine.

**188**. On a supposé que les cordes DQ, CP étaient infiniment déliées; mais les cordes sont ordinairement d'un diamètre fini, ce qui change sensiblement le rapport que nous avons établi entre la puissance et la résistance. En effet, les forces P et Q, que l'on peut regarder comme agissant suivant les axes des cordons, ont leurs bras de levier respectifs augmentés des demi-diamètres de ces cordons. On n'a donc pas alors : la puissance est à la résistance comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue; mais bien, *la puissance* P *est à la résistance* Q *comme le rayon du cylindre augmenté du rayon*

*de la corde* DQ, *est au rayon de la roue augmenté du rayon de la corde* CP.

Si les rayons des cordes DQ et CP sont proportionnels aux rayons du cylindre et de la roue, cette proportion revient à la première, comme si les cordes étaient des fils infiniment petits, appliqués tangentiellement à la roue et au cylindre.

**189.** Si l'on veut considérer actuellement un tour sollicité par tant de forces que l'on voudra, situées dans des plans perpendiculaires à l'axe, on verra, comme ci-dessus, qu'en transformant chaque force en une autre égale, parallèle et de même sens, appliquée sur l'axe, et en un couple qui aura pour bras de levier la distance de la force à l'axe, toutes les forces transportées sur l'axe seront toujours détruites par sa résistance, mais que tous les couples devront se réduire à un couple nul de lui-même pour l'équilibre. Or, tous ces couples étant dans des plans parallèles, le couple résultant sera égal à leur somme, et, par conséquent, il faudra, pour l'équilibre, que la somme des moments des forces par rapport à l'axe soit égale à zéro, en prenant avec des signes contraires les moments des forces qui tendent à faire tourner en sens contraires.

Pour les pressions exercées sur l'axe fixe, elles seront évidemment les mêmes que si toutes les forces appliquées s'y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes, sans sortir de leurs plans perpendiculaires à cette ligne.

Lorsque les forces appliquées au treuil sont dirigées dans des plans quelconques, on peut décomposer chacune d'elles en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction de l'axe fixe. Mais, les forces parallèles étant transportées dans l'axe, leur résultante est détruite par la résistance longitudinale de cet axe, et leur couple résultant, qui passe par le même axe, est détruit par sa résistance transversale. Il ne reste donc à considérer, pour l'équilibre du treuil, que le groupe des forces qui sont situées dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe, ce qui revient au cas précédent.

Ainsi, en nommant P, P′, P″, etc., les forces appliquées; $\omega$, $\omega'$, $\omega''$, etc., leurs inclinaisons sur l'axe, et $p$, $p'$, $p''$, etc., leurs plus courtes distances à cette droite, on aura, pour l'équilibre, l'équation

$$Pp \sin \omega + P'p' \sin \omega' + P''p'' \sin \omega'' + \text{etc.} = 0,$$

ce qui est la condition exprimée au n° **120**.

Quant à l'axe du treuil, il sera pressé, 1° par les composantes $P \sin \omega$, $P' \sin \omega'$, $P'' \sin \omega''$, etc.,

transportées sur cet axe; 2° par la résultante des forces parallèles $P \cos \omega$, $P' \cos \omega'$, $P'' \cos \omega''$, etc., qui tend à entraîner le treuil dans le sens de sa longueur; et 3° enfin, par le couple résultant de ces dernières composantes, ce qui revient à deux forces égales perpendiculaires à l'axe, et qui le poussent en sens contraires.

## DU PLAN INCLINÉ.

**190.** Lorsqu'un point est pressé contre un plan inébranlable et inflexible, par une force normale à ce plan, il est clair que ce point doit rester en équilibre; car il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve dans le plan, d'un côté plutôt que de l'autre, puisque toutes les directions qu'il pourrait prendre font un même angle droit avec la direction de la force; et d'ailleurs il ne peut se mouvoir à travers le plan qui est supposé parfaitement inflexible.

Réciproquement, le point dont il s'agit ne pourra être en équilibre, à moins que la force qui le presse ne soit normale au plan d'appui; car, si elle y était inclinée, cette force pourrait se décomposer en deux autres, l'une perpendiculaire au plan et l'autre située dans ce plan. La première serait détruite; mais la seconde obtiendrait son effet, car il est visible

qu'elle ne pourrait être altérée par la présence du plan le long duquel elle tend à s'exercer. Ainsi, il n'y aurait pas équilibre.

On peut dire la même chose d'un point qui s'appuie sur une surface courbe, et le considérer comme s'il reposait sur le plan tangent mené à la surface par ce point même. Il faut donc, pour l'équilibre, que la direction de la force qui le presse soit normale à ce plan, au point de contact; et voilà pourquoi, dans l'équilibre du levier qui ne fait que poser sur l'appui, il faut non-seulement que la résultante des forces y passe, mais encore qu'elle soit perpendiculaire à l'élément de contact du levier et de cet appui.

**191.** On voit donc, d'après ce que l'on vient de dire, que lorsqu'un corps est tenu en équilibre contre un plan inébranlable, ce plan ne peut détruire que des forces dont les directions lui sont normales aux différents points de contact, et que, par conséquent, sa résistance ne peut faire naître que de telles forces en sens contraires.

Donc, si un corps de figure quelconque, sollicité par des forces quelconques P, Q, R, etc.,
Fig. 59. (*fig.* 59), ne s'appuie contre un plan que par un seul point O, il ne pourra demeurer en

équilibre, à moins que toutes les forces P, Q, R, etc., qui lui sont appliquées, ne soient en équilibre avec une force unique N, qui serait normale à ce plan au point O, et qui représenterait sa résistance actuelle. Donc, *pour l'équilibre d'un corps qui s'appuie par un seul point contre un plan, il faut,* 1° *que toutes les forces appliquées aient une résultante unique;* 2° *que la direction de cette résultante soit normale au plan;* 3° *qu'elle passe au point de contact.*

On voit que ces trois conditions reviennent à celles qu'on a données plus haut pour l'équilibre du levier qui ne fait que poser sur l'appui. Nous aurions pu les trouver par le même raisonnement et les exprimer de la même manière, en disant que toutes les forces appliquées, étant transportées parallèlement à elles-mêmes au point de contact, doivent y donner une résultante normale au plan, et que tous les couples engendrés doivent donner un couple résultant nul de lui-même.

**192.** Lorsque le corps touche le plan par plusieurs points A, B, C, D, etc. (*fig.* 60), chacun des points de contact fait naître une résistance normale au plan en ce point; mais toutes ces résistances, étant parallèles et de même Fig. 60.

sens, se composent toujours en une seule, dont la direction tombe nécessairement dans l'intérieur du polygone formé par tous les appuis A, B, C, D, etc. Les forces appliquées doivent donc être en équilibre avec cette force unique, et, par conséquent, *lorsqu'un corps s'appuie contre un plan par plusieurs points, il faut, pour l'équilibre, que les forces appliquées puissent se réduire à une seule, normale au plan, et dont la direction tombe dans l'intérieur du polygone formé par tous les points de contact.*

On voit, par là, que si le corps repose par une surface finie, la résultante doit rencontrer le plan en l'un quelconque des points de cette surface.

*De la pression exercée sur le plan.*

**193.** Lorsque le corps ne repose que par un seul point, il est clair, d'après ce que nous venons de dire, que la pression exercée par les forces est égale à leur résultante.

Si le corps repose par deux points A et B
Fig. 61. (*fig.* 61), la résultante N dont la direction tombe nécessairement entre A et B, sur la droite qui joint ces deux points d'appui, se décompose en deux forces parallèles $p$ et $q$, qui expriment leurs pressions respectives.

Soit O le point où la résultante N va ren-

contrer la ligne AB; on aura pour la pression $p$ du point A, N : $p$ :: AB : BO; et pour la pression $q$ du point B, N : $q$ :: AB : AO; d'où l'on voit que, la résultante ou la pression totale N étant représentée par la distance AB des deux appuis, les deux pressions individuelles de ces points sont représentées réciproquement par leurs distances à la pression totale.

Si le corps repose par trois points A, B, C (*fig.* 62), la résultante N des forces appliquées doit passer en quelque point O dans l'intérieur du triangle ABC (**192**). Si de l'un des angles, de l'angle A par exemple, on mène la ligne AO, et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en I avec le côté opposé BC, la force N se décomposera en deux autres parallèles $p$ et $n$ appliquées aux points A et I. Ensuite, la force $n$ se décomposera en deux autres parallèles $q$ et $r$ appliquées en B et C; de sorte que les trois forces $p$, $q$, $r$ exprimeront les pressions respectives des trois appuis A, B, C. Fig. 62.

Formons autour du point O, comme sommet, et sur les trois côtés respectifs BC, AC, AB comme bases, les trois triangles BOC, AOC, AOB. Si l'on représente la pression totale exercée en O par l'aire du triangle ABC, les pressions exercées aux trois angles A, B, C seront représentées par les aires respectives des

triangles BOC, AOC, AOB formés sur les côtés opposés.

Car la force N, appliquée en O, est à la force $p$, appliquée en A, comme AI est à OI : mais les triangles BAC, BOC, ayant même base BC, sont entre eux comme leurs hauteurs, ou comme les lignes AI et OI également inclinées sur la base : on a donc N : $p$ :: ABC : BOC. Mais un même raisonnement prouverait qu'on a N : $q$ :: ABC : AOC, et N : $r$ :: ABC : AOB. Donc, etc.

**194.** Lorsque le corps s'appuie sur le plan par plus de trois points (ou seulement par trois, s'ils tombent en ligne droite), les pressions individuelles des appuis sont indéterminées, parce qu'il y a une infinité de manières de décomposer la force N en d'autres forces parallèles appliquées en ces points.

Il suffit que ces pressions individuelles satisfassent à ces conditions, 1° qu'elles soient toutes de même sens que la pression totale; 2° qu'elles puissent se composer en une seule, égale à cette pression totale et appliquée au même point O. Cette dernière condition exige trois équations, dont la première exprime que la somme des pressions est égale à la pression totale; et les deux autres, que la somme des

moments des pressions individuelles, par rapport à deux axes quelconques tirés dans le plan des appuis, est égale au moment de la pression totale, par rapport aux mêmes axes (**84** à **127**).

**195.** Si l'on veut considérer actuellement l'équilibre d'un corps qui s'appuie à la fois contre plusieurs plans, on observera que chacun de ces plans fait naître, aux divers points de contact, des résistances de même sens, perpendiculaires à ce plan, et qui, par conséquent, se composent toujours en une seule, perpendiculaire au même plan. Il faut donc que toutes les forces appliquées soient en équilibre avec ces diverses résistances, qui seront en même nombre que les plans d'appui; et, par conséquent, les forces qui tiennent en équilibre un corps appuyé sur plusieurs plans doivent toujours se réduire à autant de forces dirigées perpendiculairement vers ces plans respectifs, et qui tombent, pour chacun d'eux, dans l'intérieur du polygone formé par les points de contact.

**196.** On voit, par là, que si le corps ne s'appuie que sur deux plans, en deux points par exemple, et n'est sollicité que par une seule force, ou par des forces qui aient une résul-

tante unique, cette force ou cette résultante unique doit pouvoir se décomposer en deux autres dirigées suivant les normales menées aux deux plans par les points de contact. Ainsi, il faut que les deux normales aillent concourir en un même point situé sur la direction de la force qui presse le corps, et se trouvent dans un même plan avec elle. D'ailleurs, cette force doit être dirigée dans l'angle des deux normales, qui est opposé à celui des deux plans, et son action doit avoir lieu vers cet angle, afin que ses deux composantes suivant les deux normales tendent à pousser le corps contre les plans, c'est-à-dire en sens contraires des résistances qu'ils font naître.

**197.** Si le corps s'appuie par trois points sur trois plans différents, la force qui le presse doit être réductible à trois autres, dirigées suivant les trois normales menées aux plans par les points de contact.

Mais il ne faut pas conclure de là que les trois normales doivent concourir en un même point sur la direction de la force, ni même qu'il doive y avoir une seule rencontre entre deux de ces quatre lignes; car trois forces qui ne se rencontrent pas peuvent se composer en une seule; et une seule force peut se décom-

poser suivant trois directions qui ne rencontrent pas la sienne, et qui ne se rencontrent pas entre elles (**75**).

*Application de la théorie à quelques exemples.*

**198**. Ce que nous venons de dire contient toute la théorie de l'équilibre des corps qui s'appuient sur des plans. Nous allons en faire quelques applications très-simples.

Soit un corps de figure quelconque, appuyé par un nombre quelconque de points, ou par une base finie, contre un plan inébranlable LDK (*fig.* 63), et sollicité par deux forces P et Q qui le tiennent en équilibre sur ce plan. Fig. 63.

D'après ce qu'on a trouvé (**192**), les deux forces P et Q doivent donner une résultante unique N normale au plan; par conséquent, leurs directions doivent concourir en quelque point, comme en F, et se trouver dans un plan perpendiculaire au plan LDK. De plus, la direction de cette résultante doit aller rencontrer le plan LDK en l'un des points de contact du corps, ou dans l'intérieur du polygone formé par les points de contact.

Supposons que toutes ces conditions soient remplies, et voyons simplement quels sont les rapports des forces P, Q, et de la pression N exercée sur le plan.

Si la puissance Q est donnée en grandeur seulement, on trouvera par cette proportion, où il n'y aura que sin QFN d'inconnu, sous quel angle QFN cette puissance Q doit agir pour faire équilibre au poids P. Or, comme à un même sinus répondent deux angles suppléments l'un de l'autre, on voit que la même puissance Q pourra être employée de deux manières différentes pour faire équilibre à la résistance : soit en faisant avec la normale FN au plan incliné un angle QFN trouvé par la proportion ci-dessus; soit en faisant avec la même ligne l'angle Q′FN, supplément du premier.

On trouvera, par la même proportion, la grandeur de la puissance Q, lorsque l'on connaîtra sa direction, ou l'angle QFN qu'elle forme avec la normale.

**200.** Le cas où la puissance Q est la plus petite, à l'égard de la résistance P, est celui où l'angle QFN a le plus grand sinus, puisque la puissance est toujours en raison inverse de ce sinus. Mais le plus grand sinus répond à l'angle droit; donc la puissance est alors perpendiculaire sur la normale FN, ou parallèle au plan incliné.

Dans ce cas, l'angle QFN est égal à l'angle

droit ACB (*fig.* 65), et la proportion précédente devient Q : P :: sin BAC : sin ACB. Mais, dans le triangle ABC, les sinus des angles A et C sont proportionnels aux côtés opposés BC, AB; et, par conséquent, on a Fig. 65.

$$Q : P :: BC : AB.$$

C'est-à-dire que, *lorsque la puissance est parallèle au plan incliné, elle est au poids du corps qu'elle y retient en équilibre comme la hauteur du plan est à sa longueur.*

**201.** Un corps pesant, abandonné à lui-même sur un plan incliné, ne tend donc à glisser le long de ce plan qu'en vertu de la pesanteur diminuée dans le rapport de la hauteur du plan à sa longueur, et c'est cette pesanteur le long du plan que l'on nomme la *pesanteur relative,* par rapport à la pesanteur le long de la verticale, que l'on nomme *pesanteur absolue.* On voit que la pesanteur absolue étant représentée par la longueur du plan incliné, la pesanteur relative est représentée par sa hauteur; ou bien, la pesanteur absolue étant représentée par le sinus de l'angle droit ou par l'unité, la pesanteur relative est représentée par le sinus de l'inclinaison du plan. Lorsque

cette inclinaison est nulle, ou lorsque le plan est horizontal, la pesanteur relative est nulle, et le corps reste en repos sur le plan, comme cela doit être; lorsque l'inclinaison du plan est égale au tiers d'un angle droit, la pesanteur relative est la moitié de la pesanteur absolue; elle se confond enfin avec la pesanteur absolue, lorsque l'inclinaison du plan est égale à l'angle droit, et que, par conséquent, le plan incliné est devenu vertical.

En général, pour comparer les pesanteurs relatives sur des plans différemment inclinés, on n'aura qu'à comparer les sinus de leurs inclinaisons.

Donnons la même hauteur BC à deux plans différemment inclinés, et adossons-les comme
Fig. 66. on le voit dans la *fig.* 66 : les pesanteurs le long de ces plans seront réciproques à leurs longueurs AB, BD; car elles sont directement proportionnelles aux sinus des angles A et D qui mesurent les inclinaisons des plans, et, dans le triangle ABD, ces sinus sont proportionnels aux côtés opposés BD et AB.

Donc, si l'on a deux corps pesants M et N appuyés sur ces plans adossés, et qu'on les lie entre eux par un fil qui passe sur une poulie de renvoi placée en R, de manière que les deux parties rectilignes du fil soient parallèles

à ces plans respectifs, ces deux corps ne pourront se faire équilibre, à moins que leurs masses ne soient proportionnelles aux longueurs AB et BD des deux plans sur lesquels ils reposent.

**202.** Lorsque la puissance Q (*fig.* 67) est horizontale, et, par conséquent, parallèle à la base AC du plan incliné, l'angle QFN devient égal à l'angle ABC, et l'on a Fig. 67.

$$Q : P :: \sin BAC : \sin ABC,$$

ou bien,

$$Q : P :: BC : AC.$$

C'est-à-dire que, *si la puissance est horizontale, elle est au poids du corps qu'elle tient en équilibre sur le plan incliné comme la hauteur du plan est à sa base.*

**203.** Le cas où la puissance est la plus grande à l'égard du poids est le cas où l'angle QFN devient nul. La puissance Q est alors perpendiculaire au plan incliné, et la proportion $Q : P :: \sin BAC : \sin QFN$ donne, pour sa valeur, $Q = \frac{P \times \sin BAC}{0} = \infty$.

Il n'y a donc pas, à proprement parler, de *maximum* pour la puissance; mais ce résultat nous apprend qu'aucune force, quelque grande

qu'elle soit, ne peut empêcher un corps pesant de glisser le long d'un plan incliné, en le pressant perpendiculairement contre ce plan. Si nous voyons tous les jours arriver le contraire, c'est que les surfaces des corps, même les mieux polis, sont hérissées d'une infinité d'aspérités qui s'engagent entre elles dans le contact de ces surfaces, et les empêchent de glisser librement les unes sur les autres. Or nous avons fait abstraction de cette propriété des corps, et de la résistance particulière qui en résulte, et que l'on nomme *la force du frottement.*

**204.** Lorsqu'un corps pesant s'appuie à la fois sur plusieurs plans inclinés, en considérant son poids comme une force verticale qui passe par son centre de gravité, on trouvera les conditions de l'équilibre d'après ce qui a été dit (**195**), et les pressions respectives que souffrent les points de contact, lorsque ces pressions seront déterminées.

Si nous considérons simplement le cas où le
Fig. 68. corps est soutenu aux deux points I et O (*fig.* 68) par deux plans inclinés HI, HO, il faudra (**196**) que les deux normales IA, OA, à ces plans, aillent concourir en un même point A de la verticale GP qui passe au centre de gravité G

du corps, et qui représente la direction de son poids. De plus, comme le poids P de ce corps doit pouvoir se décomposer suivant ces normales, il faudra qu'elles soient toutes deux dans un même plan avec la direction GP, et, par conséquent, dans un plan vertical.

Ces conditions suffisent pour l'équilibre, et si l'on prend, sur la direction du poids, une partie quelconque AD qui représente sa quantité, et qu'on achève sur AD comme diagonale, et suivant les directions AI et AO, le parallélogramme ABCD, la force P se décomposera en deux autres, représentées par les côtés AB et AC de ce parallélogramme. Ces deux forces seront respectivement détruites par les deux plans inclinés, et donneront en même temps les valeurs de leurs pressions individuelles.

Observons que le plan des deux normales IA, OA étant à la fois perpendiculaire aux deux plans inclinés, est perpendiculaire à leur commune intersection; mais ce plan est en même temps vertical, puisqu'il passe par la verticale GP : donc la commune intersection des deux plans inclinés doit être perpendiculaire à un plan vertical : donc elle est horizontale. Ainsi, un corps pesant ne peut rester en équilibre entre deux plans inclinés,

à moins que leur intersection ne soit horizontale, ce qui paraissait d'ailleurs assez évident.

*De la Vis.*

**205.** La *vis* est une machine qui se rapporte à la fois au levier et au plan incliné. On y considère en général l'équilibre d'un corps qui se trouve en même temps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et à descendre uniformément le long de cet axe, en s'appuyant sur une surface inclinée.

Mais pour exprimer clairement la construction de cette machine, considérons d'abord un
Fig. 69. cylindre droit ABCD (*fig.* 69) que l'on développe sur un plan. Le développement est un rectangle BEMC dont la base BE est égale en longueur à la circonférence du cylindre, et peut s'exprimer par $2\varpi r$, en nommant $r$ le rayon du cylindre, et $\varpi$ le rapport de la circonférence au diamètre.

Divisons le côté BC en parties égales BR, RQ, QP, etc.; et, après avoir pris sur EM la partie EG = BR, menons BG, et les parallèles RH, QK, etc.

Si l'on replie le rectangle BEMC sur le cylindre, la suite des droites BG, RH, etc., tracera sur sa surface une courbe continue que

l'on nomme *hélice*, la première droite BG, formant une portion de l'hélice qui commencera en B, et aboutira en R, où elle sera continuée par la seconde droite RH, et ainsi de suite. Chacune de ces portions de l'hélice, dont les deux extrémités viennent aboutir sur la même génératrice, et qui fait ainsi le tour entier du cylindre, se nomme *spire;* et l'intervalle compris entre deux spires consécutives, mesuré le long de la génératrice, et qui est partout le même, se nomme le *pas* de l'hélice.

Puisque, dans le développement du cylindre, l'hélice est une suite de lignes droites parallèles, il est clair que la propriété caractéristique de l'hélice est d'être partout également inclinée aux diverses génératrices qu'elle va rencontrer sur la surface cylindrique. Lorsque le cylindre est vertical, elle est donc partout également inclinée à l'horizon, et un point $a$, qui repose sur cette hélice, et qui peut être regardé comme situé sur la tangente en ce point, est dans le même cas que s'il reposait en $a'$ sur un plan incliné QHK, dont la base est $QH = 2\varpi r$, et dont la hauteur HK est égale au pas de l'hélice, et sera désignée simplement par $h$.

**206.** Si l'on suppose donc que le point $a$ soit

pressé sur l'hélice par une force verticale $p$, et soit retenu en même temps par une force horizontale $f$, qui, appliquée tangentiellement au cylindre, empêche ce point de glisser sur l'hélice, on aura (**202**)

$$f : p :: \mathrm{HK} : \mathrm{QH},$$

ou

$$f : p :: h : 2\varpi r.$$

Menons par le point $a$ l'horizontale $ao$, qui rencontre en $o$ l'axe FI du cylindre, que je suppose fixe. Prolongeons indéfiniment cette droite, et considérons-la comme un levier inflexible, mobile autour du point fixe $o$.

Au lieu d'appliquer immédiatement au point $a$ une force horizontale $f$, pour retenir ce point sur l'hélice, on pourrait appliquer une autre force parallèle $q$ en un point quelconque du levier $bo$; et cette force $q$ ferait sentir au point $a$ la même impression que la force $f$, si elle était à celle-ci dans la raison réciproque des deux bras de levier $bo$ et $ao$, c'est-à-dire (en faisant $bo = \mathrm{R}$, et observant que $ao$ est le rayon $r$ du cylindre), si l'on avait

$$q : f :: r : \mathrm{R};$$

mais on a trouvé ci-dessus

$$f : p :: h : 2\varpi r.$$

Donc, en multipliant par ordre, on aura

$$q : p :: h : 2\varpi R;$$

c'est-à-dire que la puissance horizontale $q$ sera à la force verticale $p$ qui presse le point $a$ sur l'hélice, comme le pas de l'hélice est à la circonférence que tend à décrire la puissance $q$ autour de l'axe du cylindre.

Observons que le rayon $r$ du cylindre, ou la distance de l'hélice à l'axe, n'entre plus dans cette proportion. Ainsi, l'on aura toujours le même rapport entre la puissance $q$ et la force $p$, quel que soit le cylindre sur lequel l'hélice est tracée, pourvu que le pas de cette hélice soit le même.

On ne doit pas perdre de vue d'ailleurs que l'on n'a supposé le cylindre vertical que pour mieux fixer les idées et simplifier le discours; mais que tout ce qu'on a dit de la force verticale $p$ et de la puissance horizontale $q$ doit s'entendre, en général, d'une force parallèle à l'axe du cylindre, et d'une puissance qui agirait dans un plan perpendiculaire au même axe, à la distance R de cette ligne.

**207.** Actuellement il n'est pas difficile de définir la vis et de trouver les conditions de son équilibre.

La vis est un cylindre droit revêtu d'un

filet saillant engendré par le plan d'un triangle, ou d'un parallélogramme, ou d'une figure quelconque qui, s'appuyant par sa base sur une génératrice, tourne autour de l'axe du cylindre, en descendant le long d'une hélice tracée sur sa surface. Tous les points qui composent le filet de la vis peuvent donc être regardés comme appartenant à des hélices décrites sur des cylindres de même axe, mais de rayons différents. Or toutes ces hélices ont évidemment le même pas, et c'est ce que l'on nomme le *pas* de la vis.

La génération de l'*écrou* est la même. Concevons une pièce M, de figure quelconque, pénétrée par le cylindre : le triangle ou le parallélogramme qui produit sur le cylindre le filet de la vis, produira dans l'intérieur de cette pièce un sillon ou creux parfaitement égal au filet, et que celui-ci remplira exactement ; et cette seconde pièce, qui peut être regardée comme le moule de la première, forme l'*écrou* de la vis.

Maintenant, si l'une de ces deux pièces est fixe, il est clair que l'autre lui est tellement assujettie, qu'elle n'a plus que la liberté de tourner autour de l'axe du cylindre, et de descendre en même temps sur la seconde, comme sur une surface inclinée. Il y a donc, entre

les forces qui se feraient équilibre sur la pièce mobile, des relations particulières qui dépendent de son assujettissement à la seconde; et ce sont ces relations qui constituent les conditions de l'équilibre dans la vis.

On ne considère ordinairement que deux forces appliquées à la pièce mobile : l'une P parallèle à l'axe, et qui tend à la faire descendre en tournant autour de cet axe; l'autre Q située dans un plan perpendiculaire à l'axe, et qui, au moyen d'un levier, tend à la faire remonter en sens contraire. Pour fixer les idées, nous supposerons ici que l'écrou soit mobile (*fig.* 70) et que la vis soit fixe : le rapport des deux forces P et Q serait absolument le même dans le cas où, l'écrou étant fixe, la vis serait mobile. Fig. 70.

D'abord, si l'écrou ne posait que par un seul point sur le filet de la vis, en nommant $h$ le pas de la vis, et R le bras de levier de la puissance ou la distance à l'axe, on aurait, d'après ce qu'on a vu,

$$Q : P :: h : 2\varpi R.$$

Mais, en quelque nombre de points que l'écrou s'appuie sur le filet, on peut imaginer que la résistance P est décomposée en autant de forces parallèles $p, p', p''$, etc., qui pres-

sent en ces différents points, et que la puissance Q est partagée en autant de forces $q$, $q'$, $q''$, etc., dont chacune fait équilibre en particulier à la force qui lui répond parmi les forces $p$, $p'$, $p''$, etc.; et comme on a constamment

$$q : p :: h : 2\varpi R,$$
$$q' : p' :: h : 2\varpi R,$$
$$q'' : p'' :: h : 2\varpi R,$$
etc ,

on aura

$$q+q'+q''\ldots \text{ ou } Q : p+p'+p''\ldots \text{ ou } P :: h : 2\varpi R;$$

c'est-à-dire que, *dans l'équilibre de la vis, la puissance qui tend à faire tourner l'écrou est à la résistance qui le presse dans le sens de l'axe comme le pas de la vis est à la circonférence que tend à décrire la puissance.*

Ainsi, la puissance a d'autant plus d'avantage pour contre-balancer la résistance, ou pour comprimer dans le sens de l'axe de la vis, que cette puissance agit à une plus grande distance de l'axe, et que le pas de la vis est moindre.

### *Du Coin.*

**208.** Le coin est un prisme triangulaire AF (*fig.* 72), que l'on introduit par l'une de ses

Fig. 72.

arêtes EF entre deux obstacles, pour exercer latéralement deux efforts qui tendent à les écarter.

L'arête EF, par laquelle le coin tend à s'enfoncer, se nomme le *tranchant* du coin; les deux faces adjacentes ADFE, BCFE, se nomment les *côtés;* et la face opposée ABCD, la *tête.*

C'est sur cette face qu'on applique le coup, au moyen d'un marteau ou d'un corps quelconque. Quelle que soit la direction du choc, on peut toujours concevoir son action comme décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire à la tête du coin, et qui obtient tout son effet sur lui; l'autre parallèle, et qui ne lui imprime aucun mouvement, parce qu'elle ne peut tendre qu'à faire glisser le marteau sur ce coin.

Nous supposerons donc sur-le-champ que la puissance soit appliquée perpendiculairement à la tête du coin, et nous chercherons simplement les efforts qui en résultent contre les deux obstacles perpendiculairement aux deux côtés.

Par la direction de la puissance P, et perpendiculairement aux arêtes du coin, faisons passer une section MNO (*fig.* 73); la ligne MN Fig. 73.
pourra représenter la tête du coin, et les deux

lignes MO et NO les deux côtés. D'un point A pris sur la direction de la puissance, abaissons deux perpendiculaires AB, AC sur les côtés MO, NO; prenons la partie AD qui représente la quantité et la direction de la puissance P, et achevons le parallélogramme ABCD.

La puissance P, représentée par AD, se décomposera en deux autres Q et R, représentées par AB et AC, et qui exprimeront les efforts exercés perpendiculairement aux côtés MO, NO.

On aura donc P : Q : R comme AD : AB : AC; ou, en mettant BD au lieu de AC, comme AD : AB : BD, c'est-à-dire, comme les trois côtés du triangle ABD.

Mais ce triangle est semblable au triangle MNO, parce que les côtés AD, AB, BD sont respectivement perpendiculaires aux trois côtés MN, MO, NO.

On aura donc

$$P : Q : R :: MN : MO : NO;$$

c'est-à-dire que, *la puissance étant représentée par la tête du coin, les deux forces qui en résultent perpendiculairement aux côtés seront représentées par ces côtés eux-mêmes.*

Si le triangle MNO est isocèle, les deux forces Q et R sont égales, et la puissance P est à l'une d'elles comme la tête du coin est à l'un

des côtés, qu'on peut nommer dans ce cas la *longueur* du coin.

On voit, par ce que nous venons de dire, qu'à puissances égales, l'effort exercé par le coin est d'autant plus grand, que la tête en est plus petite par rapport à la longueur.

### *De quelques Machines composées.*

**209.** Jusqu'à présent nous n'avons considéré qu'un seul corps solide, gêné dans ses mouvements par différents obstacles; et c'est ce qui forme les diverses machines simples. Nous allons considérer actuellement un assemblage de machines simples qui réagissent les unes sur les autres en vertu de leur liaison mutuelle; et c'est ce que l'on nomme une *machine composée*.

Si l'on ne suppose que deux forces appliquées à la machine composée, on voit que la machine simple, qui reçoit immédiatement l'action de l'une d'elles, transmet cette action, d'après les lois de son équilibre, à la machine simple avec laquelle elle est liée; que celle-ci la transmet de même à la machine suivante; et ainsi de suite, jusqu'à la dernière qui communique l'action à la seconde force, ou à la résistance qu'il faut vaincre. Ainsi, il est tou-

jours facile de déterminer le rapport de la puissance à la résistance par une suite de proportions données par les lois de l'équilibre des machines intermédiaires; et c'est ce qu'on va vérifier tout à l'heure sur quelques exemples très-simples.

Mais nous devons faire observer que les questions suivantes se rapportent naturellement au problème le plus général de la Statique, c'est-à-dire font partie de cette théorie étendue où l'on recherche les lois de l'équilibre dans les systèmes dont la figure est variable suivant des conditions quelconques données. Les deux axiomes qui servent de base à cette théorie sont :

1°. *Que si un système quelconque de points est en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même, tant en vertu des forces qui lui sont immédiatement appliquées, qu'en vertu des résistances ou réactions qu'il éprouve de la part des autres points du système;*

2°. *Que deux points ne peuvent agir l'un sur l'autre que dans la direction de la droite qui les joint, et que l'action est toujours égale et contraire à la réaction.*

Au moyen de ces deux axiomes et des conditions connues de l'équilibre d'un corps libre, on peut trouver les conditions de l'équilibre

d'un système quelconque de corps, pourvu qu'on sache évaluer les résistances qui naissent de leur liaison mutuelle : car ces résistances étant une fois évaluées, il ne s'agit plus que de les combiner avec les forces données immédiatement par la question, et d'exprimer les conditions de l'équilibre de chaque corps comme s'il était parfaitement libre dans l'espace.

Quoique nous ne puissions, sans passer les bornes de cet Ouvrage, traiter ici ce sujet avec toute la généralité dont il est susceptible, nous donnerons néanmoins les conditions de l'équilibre de quelques systèmes variables qu'on emploie souvent dans les arts, et que l'on a coutume de considérer dans les éléments de Statique, parce que les réactions des différents corps les uns sur les autres y sont très-faciles à évaluer, et ne supposent guère que la composition des forces et les deux axiomes précédents.

### *Des Cordes.*

**210.** Considérons premièrement un *polygone funiculaire*, c'est-à-dire un assemblage de points liés entre eux par des cordons parfaitement flexibles et inextensibles.

On sait d'abord que si trois forces P, Q, R

Fig. 74 (*fig.* 74) dirigées suivant les axes de trois cordons AP, AQ, AR, sont en équilibre autour d'un même point A, chacune de ces forces doit être égale et directement opposée à la résultante des deux autres.

Il faut donc, 1° que les axes des trois cordons soient dans un même plan; 2° que les rapports des forces soient tels, que chacune d'elles puisse être représentée par le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres. Ainsi, l'on a, pour l'équilibre, cette suite de rapports :

$$P : Q : R :: \sin QAR : \sin PAR : \sin PAQ.$$

**211.** Si l'on suppose que les extrémités des cordons AQ, AR soient fixes, les valeurs de Q et R, données par les rapports ci-dessus, exprimeront les efforts que supportent ces points fixes en vertu de la force P, ou les tensions des deux cordons AQ, AR.

On voit que ces tensions seront d'autant plus grandes que l'angle QAR sera plus obtus, et qu'elles deviendront infinies, si cet angle devient égal à deux angles droits.

Une corde tendue en ligne droite à deux points fixes sera donc nécessairement rompue par la plus petite force qui lui serait appliquée transversalement, si cette corde, n'étant pas

susceptible de s'étendre, n'a pas d'ailleurs une résistance longitudinale infinie.

**212.** Les conditions précédentes pour l'équilibre des trois forces P, Q, R supposent que le point A soit invariablement attaché à chacun des cordons, ou que le nœud qui les rassemble soit fixe : mais si le point A pouvait couler le long du cordon RAQ (*fig.* 75), comme ferait un anneau infiniment petit, enfilé par ce cordon, alors il ne suffirait plus que les forces P, Q, R eussent les relations données ci-dessus, il faudrait encore que la direction de la force P divisât en deux également l'angle formé par les deux parties de la corde QAR. Fig. 75.

En effet, si l'on suppose que l'équilibre ait lieu, et qu'on fixe invariablement deux points F et F′ pris où l'on voudra sur ces cordons, il est clair que le point A est dans le même cas que s'il avait la liberté de se mouvoir dans une ellipse dont F et F′ sont les deux foyers, et AF, AF′ les rayons vecteurs. Or, pour qu'il soit en équilibre sur cette courbe en vertu de la force P, il faut que cette force soit perpendiculaire à la tangente à l'ellipse en ce point (**190**), et, par conséquent, divise en deux parties égales l'angle FAF′, formé par les rayons vecteurs.

Ainsi, dans le cas d'un nœud coulant, les deux parties de la corde le long de laquelle le nœud peut glisser doivent être également tendues.

**213.** On voit en même temps que, si l'on suppose le point ou l'anneau A fixe, les deux forces Q et R, appliquées au cordon QAR qui passe dans cet anneau, doivent être égales entre elles pour l'équilibre, et que la pression exercée par les deux forces sur le point fixe A est dirigée suivant la ligne qui divise en deux parties égales l'angle formé par les deux parties du cordon.

Quant au rapport de cette pression P à la tension Q du cordon, on aura, en nommant $\alpha$ la moitié de l'angle QAR, $P : Q :: \sin 2\alpha : \sin \alpha$; ou bien, $P : Q :: 2 \cos \alpha : 1$.

D'où l'on voit que la pression exercée sur le point A est égale à la tension de la corde multipliée par le double cosinus de la moitié de l'angle QAR.

**214.** Actuellement, soient plusieurs points
Fig. 76. A, B, C, D (*fig.* 76), liés entre eux par des cordons AB, BC, CD, et tirés par des forces N, P, Q, R, S, T, suivant d'autres cordons, mais de manière que chacun des points ou

nœuds A, B, C, D n'en assemble pas plus de trois en même temps.

Si tout le système est en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même, en vertu des forces qui lui sont appliquées et des tensions des cordons adjacents. Le point A par exemple, n'étant lié immédiatement qu'au seul point B, doit être en équilibre en vertu des deux forces N et P, et la tension du cordon AB; car les autres points C et D ne peuvent réagir sur lui que par le cordon AB.

Il faut donc que les trois cordons AN, AP, AB soient dans un même plan; et si l'on nomme X la tension du cordon AB, il faut qu'on ait les rapports suivants :

$$N : P :: \sin PAB : \sin NAB,$$
$$P : X :: \sin NAB : \sin NAP.$$

De même, le point B doit être en équilibre en vertu de la force Q et des tensions suivantes BA et BC. Or la tension du cordon AB est la même que tout à l'heure; car l'action du point A sur le point B est parfaitement égale et contraire à l'action du point B sur le point A. Nous avons nommé X cette tension, nommons Y celle du cordon BC; on aura

$$X : Q :: \sin QBC : \sin ABC,$$
$$Q : Y :: \sin ABC : \sin QBA.$$

L'équilibre du point C donnera de même

$$Y : R :: \sin RCD : \sin BCD,$$
$$R : Z :: \sin BCD : \sin BCR.$$

On aura de même pour le point D deux proportions, etc., et ainsi de suite, s'il y avait un plus grand nombre de points.

En multipliant par ordre un nombre convenable de ces proportions, on trouvera le rapport de l'une quelconque des forces à telle autre force ou tension que l'on voudra. Si l'on multiplie les trois premières, par exemple, on aura le rapport de N à Q. Si l'on multiplie les quatre premières, on aura celui de N à la tension Y; etc.

**215.** Si les directions prolongées des forces P, Q, R, S divisent en deux parties égales les angles respectifs, NAB, ABC, BCD, CDT, du polygone funiculaire, les cordons AN, AB, BC, CD, DT seront tous également tendus; car on aura, par les rapports précédents,

$$N = X, \quad X = Y, \quad Y = Z, \quad Z = T.$$

De plus, en nommant $2\alpha$, $2\beta$, $2\gamma$, $2\delta$ les angles du polygone, on aura, par les mêmes proportions,

$$P : Q : R : S :: \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma : \cos\delta;$$

c'est-à-dire que les forces appliquées aux divers angles du polygone seront proportionnelles aux cosinus des moitiés de ces angles.

Donc, si, au lieu des forces P, Q, R, S, on substitue des points fixes A, B, C, D par-dessus lesquels passe la corde NABCDT, d'abord les deux forces N et T qui tirent les extrémités de cette corde seront égales entre elles, et la corde sera partout également tendue; et en second lieu, la corde pressera sur chaque point en raison du cosinus de la moitié de l'angle formé en ce point, car chacun des points fixes A, B, C, D tient lieu d'une force qui divise en deux également l'angle formé par les deux parties de la corde qui y passe (**213**).

**216**. Supposons que les deux côtés contigus AB, BC soient égaux; le cosinus de la moitié de l'angle compris est marqué par le rapport de l'un des côtés au diamètre du cercle qui passerait par les trois points A, B, C. Donc, si tous les côtés du polygone funiculaire sont égaux entre eux, on peut dire que les forces P, Q, R, S sont réciproques aux diamètres de ces différents cercles dont chacun passe par trois angles consécutifs du polygone.

Or, en considérant une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés égaux, chacun

des cercles dont il s'agit devient, en chaque point de la courbe, ce qu'on nomme le cercle *osculateur*, c'est-à-dire le cercle qui a la même courbure en ce point.

Donc, lorsqu'une courbe funiculaire rentrante sur elle-même, ou dont les deux bouts sont fixes, est tirée en tous ses points équidistants par une infinité de forces normales qui se font équilibre, la corde est partout également tendue, et chaque force normale à la courbe est réciproque au rayon de la courbure dans le point où cette force est appliquée.

On a un exemple très-simple de cet équilibre dans une corde tendue par deux forces sur le contour d'une courbe fixe quelconque; car chaque point de la courbe fixe tient lieu d'une force qui serait dirigée suivant la normale à cette courbe. Ainsi, dans l'équilibre de la corde, la tension est partout la même, et chaque point de la courbe fixe est pressé suivant la normale en raison inverse du rayon de courbure.

**217.** Le polygone funiculaire NABCDT étant en équilibre en vertu des forces N, P, Q, R, S, T, concevons que sa figure devienne parfaitement invariable, de manière que les points A, B, C, D ne puissent plus changer leurs

distances mutuelles : il est clair que l'équilibre subsistera toujours. Mais alors, les forces N, P, Q, R, S, T étant en équilibre sur un système invariable, l'une d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres ; ainsi, ces autres forces ont une résultante. Or, comme cette résultante est exactement la même que si toutes les composantes s'étaient réunies parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque de sa direction, il s'ensuit que *chaque cordon est tendu par la force qui le sollicite, comme il le serait par la résultante de toutes les autres forces qu'on y transporterait parallèlement à elles-mêmes.*

**218.** Lorsque les cordons extrêmes AN, DT sont dans un même plan, les deux forces N et T ont une résultante; et, d'après ce qu'on vient de dire, cette force doit être égale et directement opposée à la résultante V des autres forces P, Q, R, S, comme si le polygone était invariable de figure. La résultante des forces P, Q, R, S appliquées aux angles du polygone doit donc passer par le point O où vont concourir les deux cordons extrêmes; et, par conséquent, si les deux extrémités N et T de ces cordons sont fixes, on aura sur-le-champ les deux efforts que supportent ces points fixes,

ou les tensions des cordons AN, DT, en décomposant, au point O, la résultante V en deux forces N et T dirigées suivant ces cordons.

On trouverait de même les tensions de deux cordons quelconques situés dans un même plan, en prenant la résultante des forces appliquées sur les nœuds intermédiaires, et la décomposant suivant ces deux cordons au point où ils concourent: car si un polygone funiculaire est en équilibre, une partie quelconque de ce polygone est aussi en équilibre d'elle-même, en vertu des forces appliquées sur cette partie, et des tensions des deux derniers cordons que l'on y considère.

**219.** Lorsque les directions des forces P, Q, R, S sont toutes parallèles (*fig.* 77), on a toujours pour les forces et les tensions les mêmes proportions que ci-dessus (**214**); mais il faut une condition de plus pour l'équilibre: c'est que toutes les forces P, Q, R, S et les côtés du polygone soient dans un même plan; car, autour de chaque nœud, les cordons doivent être dans un même plan (**210**). Mais si le cordon BQ est parallèle au cordon AP, le plan PAB des trois premiers cordons est le même que le plan ABQ des trois suivants; et ainsi de suite.

Fig. 77.

Dans cette hypothèse de puissances parallèles, comme on a

$$\sin PAB = \sin QBA, \quad \sin QBC = \sin RCB, \text{ etc.},$$

on trouvera par les proportions (**214**) que les tensions successives N, X, Y, Z, T sont réciproques aux sinus des inclinaisons des côtés sur la direction des puissances parallèles P, Q, R, S, et qu'ainsi chacune des tensions est représentée par la sécante de son inclinaison sur une perpendiculaire à ces puissances.

Cela pourrait se voir aussi, comme au n° **218**, en comparant immédiatement les tensions de deux côtés quelconques, qui seront toujours ici situés dans un même plan.

Mais, pour avoir des expressions plus simples et plus commodes, regardons toutes les forces appliquées au polygone comme étant verticales, et supposons qu'un des côtés de ce polygone soit horizontal.

Si l'on voulait comparer la tension $t$ d'un côté quelconque à la tension $a$ du côté horizontal d'où l'on part, on imaginerait ces deux côtés prolongés jusqu'à leur rencontre, et l'on supposerait en ce point une force verticale V égale à la somme des puissances appliquées sur les nœuds intermédiaires, et qui ferait équilibre aux deux tensions $a$ et $t$.

On aura donc, en nommant $\varphi$ l'inclinaison de la tension $t$ sur la tension horizontale $a$,

$$t : a :: 1 : \cos\varphi,$$

ou $t = a \operatorname{séc} \varphi$ : d'où l'on voit que, *dans l'équilibre d'un polygone funiculaire tiré par des puissances verticales, la tension de chaque côté est proportionnelle à la sécante de l'angle que fait ce côté avec l'horizon.*

On aurait ensuite

$$t : V :: 1 : \sin\varphi;$$

ce qui donne la tension d'un côté quelconque exprimée par son inclinaison sur le côté horizontal, et par la somme des puissances parallèles qui agissent entre ces deux côtés.

On aurait enfin (ce qui, d'ailleurs, est une suite des deux proportions précédentes)

$$V : a :: \sin\varphi : \cos\varphi,$$

ou $V = a \operatorname{tang} \varphi$; d'où l'on tire ce théorème relatif à la figure que prend le polygone en vertu des forces appliquées : *la tangente de l'inclinaison de chaque côté sur l'horizon est proportionnelle à la somme des puissances verticales appliquées sur le contour, depuis le côté le plus bas jusqu'à celui que l'on considère.*

*De la Chaînette.*

**220.** On peut considérer une corde pesante comme un fil chargé d'une infinité de petits poids distribués sur toute sa longueur, ou comme un fil sollicité en tous ces points par de petites forces verticales, et, par conséquent, parallèles. On voit donc que si cette corde est attachée à deux points fixes S et T (*fig.* 78), elle ne peut demeurer en équilibre, à moins qu'elle ne soit tout entière dans un plan vertical. Elle forme alors un polygone funiculaire d'une infinité de côtés, ou plutôt une ligne courbe que l'on nomme la *chaînette.* Fig. 78.

Pour trouver les efforts que la corde exerce sur les deux points S et T qui la soutiennent, on mènera à la courbe en ces points deux tangentes SO, TO, qui seront comme les prolongements des derniers côtés du polygone funiculaire; appliquant ensuite au point O une force égale à la résultante de toutes les forces qui la sollicitent, c'est-à-dire égale au poids total de la corde, on décomposera cette force en deux autres dirigées suivant les tangentes OS, OT, et qui exprimeront les charges respectives des deux points de suspension (**218**).

On trouverait de même la tension de la

corde en un point quelconque, en imaginant que ce point est fixe, et en cherchant, comme ci-dessus, la charge qu'il éprouve par le poids du reste de la corde qui demeure en équilibre au-dessous.

Au reste, si l'on nomme $t$ la tension en un point quelconque M de la chaînette, $a$ celle qui a lieu au point B le plus bas, V le poids de l'arc $s$ compris entre ces deux points, et $\varphi$ l'angle formé avec la ligne horizontale par la tangente à l'extrémité de l'arc $s$, on aura entre ces quatre quantités les mêmes équations qu'au n° **219**.

On voit donc, par la première équation $t = a \text{ séc } \varphi$, que, *dans une corde pesante en équilibre, la tension en chaque point varie comme la sécante de l'inclinaison de la courbe sur la ligne horizontale.*

Par la seconde équation $V = t \sin \varphi$, on voit que *la tension à l'extrémité d'un arc quelconque de la corde est égale au poids de cet arc divisé par le sinus de l'inclinaison de la corde en ce point.*

Et l'on doit remarquer que ces équations ont lieu, quelle que soit l'inégalité de la corde ou chaîne pesante que l'on considère.

Si la chaîne est uniforme, on peut représenter le poids V de l'arc $s$ par la longueur de cet arc lui-même, et la troisième équation

devient $s = a \operatorname{tang} \varphi$ : équation très-simple de la chaînette entre les coordonnées $s$ et $\varphi$.

Ainsi, *la chaînette est une courbe telle, que la tangente de son inclinaison sur un axe horizontal augmente comme la longueur de l'arc, à partir du point le plus bas.*

Cette courbe est donc la même à gauche et à droite de l'axe vertical qui passe par le sommet B, et, comme la parabole, elle a deux branches égales qui s'étendent à l'infini.

Il est même aisé de voir que le rayon R de la courbure y est exprimé par $R = a : \cos^2 \varphi$, et qu'ainsi il est réciproque au carré du cosinus de l'inclinaison de la courbe sur son axe horizontal.

Car, en considérant une courbe comme un polygone d'une infinité de côtés égaux $c$, on a, pour le rayon R du cercle décrit sur deux côtés consécutifs comme cordes,

$$R = c : 2 \sin \varepsilon,$$

en nommant $2\varepsilon$ l'angle extérieur du polygone (**216**).

Or, $\varphi$ étant l'inclinaison du premier côté, et, par conséquent, $\varphi + 2\varepsilon$ étant celle du second, on a ici par les deux équations $s = a \operatorname{tang} \varphi$ et $s + c = a \operatorname{tang} (\varphi + 2\varepsilon)$, l'équation

$$c = a [\operatorname{tang} (\varphi + 2\varepsilon) - \operatorname{tang} \varphi],$$

expression qu'on peut ramener à celle-ci :

$$c = a \cdot \frac{2 \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon}{\cos \varphi \,.\, \cos (\varphi + 2 \varepsilon)}.$$

On a donc

$$R = \frac{c}{2 \sin \varepsilon} = a \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos \varphi \,.\, \cos (\varphi + 2 \varepsilon)};$$

d'où l'on tire, en faisant l'angle extérieur $2\varepsilon$ égal à zéro (afin de passer du polygone à la courbe même),

$$R = \frac{a}{\cos^2 \varphi}.$$

*Ce qu'il fallait démontrer.*

**221.** Ce qu'on vient de dire d'une corde pesante, ou d'un assemblage de petits corps pesants unis ensemble par un fil inextensible, pourrait s'appliquer à plusieurs globules appuyés les uns contre les autres, et qui se soutiendraient mutuellement en voûte. Ils doivent affecter alors la forme d'une chaînette renversée; car, si tous ces globules, à cause de leur impénétrabilité mutuelle, sont en équilibre en vertu de leur poids ou des forces verticales qui les sollicitent, il est clair qu'ils demeureraient encore en équilibre, si ces forces venaient à agir en sens contraire, pourvu qu'alors on supposât tous ces globules liés deux à deux par un fil inextensible;

mais alors ce fil formerait une chaînette renversée : donc il a actuellement cette figure.

C'est encore la figure que prendrait une voile verticale enflée par le vent; car, considérez dans cette voile une section quelconque horizontale $s$ que nous regarderons comme un polygone d'une infinité de côtés égaux : il est visible que le nombre des molécules d'air qui viennent rencontrer un de ces côtés est proportionnel, non pas à la longueur $c$ de ce côté, mais à sa projection $c \,.\, \cos\varphi$ sur une perpendiculaire à la direction du vent. Ainsi, la force qui vient sur chaque élément de la courbe $s$ est proportionnelle au cosinus de son inclinaison $\varphi$ à la perpendiculaire dont il s'agit. Mais cette force n'agit pas tout entière sur la voile : car, à la rencontre du côté $c$, la vitesse $v$ de chaque molécule d'air se décompose en deux : l'une $v \sin\varphi$ parallèle à $c$, et qui ne tend qu'à faire glisser cette molécule sur la voile sans y produire aucun effet; l'autre $v \cos\varphi$ perpendiculaire au côté $c$, et qui seule agit pour tendre cette voile. La force normale qui presse chaque élément de la courbe $s$ est donc proportionnelle à $\cos^2\varphi$.

Mais une courbe étant tenue en équilibre par des forces normales appliquées en tous ses points équidistants, chacune d'elles (**216**) est réciproque au rayon de la courbure dans

le point où cette force est appliquée : et *vice versâ*, ce rayon est réciproque à la force. Or ici la force est proportionnelle à $\cos^2 \varphi$ : donc une section quelconque horizontale, faite dans une voile verticale enflée par le vent, est de telle nature que le rayon osculateur y est réciproque au carré du cosinus de l'inclinaison de la courbe sur une perpendiculaire à la direction du vent : ce qui est précisément une chaînette dont l'axe serait dans cette direction (**220**).

### *Des Poulies et des Moufles.*

**222.** Considérons maintenant un système de poulies mobiles A, A′, A″ (*fig.* 79). La première A, qui soutient un poids P attaché à sa chape, se trouve embrassée par une corde dont l'une des extrémités F est fixe, tandis que l'autre est attachée à la chape de la poulie suivante A′; cette seconde poulie est de même embrassée par une corde dont l'une des extrémités F′ est fixe, tandis que l'autre est attachée à la chape de la troisième poulie A″; et ainsi de suite jusqu'à la dernière, dont le cordon, arrêté d'une part à un point fixe F″, est tiré de l'autre par une puissance Q.

Fig. 79.

Si tout le système est en équilibre, chaque poulie est en équilibre d'elle-même, en vertu

des forces ou des tensions qui agissent sur elle.

Ainsi, nommant $r$, $r'$, $r''$ les rayons respectifs des poulies; $c$, $c'$, $c''$ les sous-tendantes des arcs embrassés par les cordons; X la tension du premier cordon; Y celle du suivant; on aura, pour l'équilibre de la poulie A (**185**),

$$X : P :: r : c.$$

On aura de même pour l'équilibre de la poulie A',

$$Y : X :: r' : c';$$

et pour la troisième A'',

$$Q : Y :: r'' : c'';$$

en multipliant par ordre, il viendra

$$Q : P :: rr'r'' : cc'c'';$$

c'est-à-dire, *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des poulies est au produit des sous-tendantes des arcs embrassés par les cordons.*

**223.** Si tous les cordons deviennent parallèles (*fig.* 80), les sous-tendantes $c$, $c'$, $c''$ deviennent égales aux diamètres $2r$, $2r'$, $2r''$, et l'on a, en divisant les deux termes du dernier Fig. 80.

une puissance, est attachée au cylindre du second tour A′. La roue de celui-ci est de même tirée par une corde qui passe sur le cylindre du troisième tour A″; et ainsi de suite jusqu'au dernier, dont la roue est tirée par la puissance Q.

Si le système est en équilibre, chaque tour est en équilibre de lui-même, en vertu des tensions des cordons qui sollicitent le cylindre et la roue. Ainsi, en nommant X la tension du cordon qui va du premier tour au second, on aura (**186**)

$$X : P :: r : R;$$

en nommant Y celle du cordon suivant, on aura

$$Y : X :: r' : R',$$

et de même pour le dernier tour,

$$Q : Y :: r'' : R'',$$

et multipliant par ordre,

$$Q : P :: rr'r'' : RR'R'';$$

c'est-à-dire, *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des cylindres est au produit des rayons des roues.*

*Des Roues dentées.*

**226.** Si l'on rapproche tous ces tours, de manière que la roue du premier devienne tangente au cylindre du second, et que la roue de celui-ci soit tangente au cylindre du troisième, et ainsi de suite; et si l'on suppose que chaque roue s'engage au cylindre contigu, de telle sorte qu'elle ne puisse tourner sans faire tourner ce cylindre, et réciproquement, on pourra supprimer les cordes qui lient tous ces tours, et l'on aura toujours le même rapport que ci-dessus entre la puissance et la résistance.

Pour engager solidement chaque roue avec le cylindre du tour suivant (*fig.* 85), on pratique à leurs circonférences des *dents* également espacées, qui engrènent les unes dans les autres, de manière que chaque roue, qu'on nomme alors *roue dentée*, ne peut tourner sur son axe, sans que le cylindre, qu'on nomme alors *pignon*, ne tourne en même temps sur le sien. Fig. 85.

On a donc, pour l'équilibre de deux forces qui réagissent l'une sur l'autre au moyen des roues dentées : *la puissance est à la résistance comme le produit des rayons des pignons est au produit des rayons des roues.*

## *Du Cric.*

**227.** On considère, dans le *cric* simple, un pignon que l'on fait tourner sur son axe au
Fig. 86. moyen d'une manivelle (*fig.* 86) : ce pignon engrène avec une barre inflexible dentée, de manière qu'en tournant sur son axe, il oblige la barre à se mouvoir dans le sens de sa longueur. En supposant donc une résistance qui s'oppose directement au mouvement de cette barre, résistance que l'on peut considérer comme une force perpendiculaire à l'extrémité du rayon du pignon, il est visible que l'on aura : *la puissance appliquée à la manivelle est à la résistance, dans le sens de la barre, comme le rayon du pignon est au rayon de la manivelle.*

D'où l'on voit que l'effort exercé par le cric sera d'autant plus considérable, que le rayon du pignon sera plus petit par rapport à celui de la manivelle.

Lorsqu'on veut augmenter encore la force du cric, sans augmenter le bras du levier de la manivelle et sans diminuer le rayon du pignon, au lieu de faire agir immédiatement ce pignon sur la barre dentée, on le fait agir sur une roue dentée intermédiaire, et c'est le pignon de cette

roue qui engrène avec la barre. Alors on a pour l'équilibre : *la puissance appliquée à la manivelle est à la résistance, dans le sens de la barre, comme le produit des rayons des deux pignons est au produit du rayon de la roue par le rayon de la manivelle.*

### *De la Vis sans fin.*

**228.** On peut encore considérer une vis mobile autour de son axe, et dont le filet mène les dents successives d'une roue à laquelle il se présente toujours d'une manière uniforme; et c'est ce qui compose la *vis sans fin.*

Par l'équilibre de la vis, on voit (*fig.* 87) que la puissance Q, appliquée à la manivelle dont le rayon est R, est à l'effort $f$, avec lequel le filet presse la dent de la roue, comme le pas $h$ de la vis est à la circonférence $2\varpi R$, que tend à décrire la puissance; et l'on a Fig. 87.

$$Q : f :: h : 2\varpi R.$$

Actuellement, si cette roue dentée, d'un rayon A, fait tourner un cylindre de même axe, et monter un poids P, suspendu au bout d'une corde qui s'enroule sur ce cylindre, on aura par l'équilibre du treuil, en nommant $a$ le rayon du cylindre,

$$f : P :: a : A,$$

et multipliant par ordre,

$$Q : P :: ah : 2\varpi R . A;$$

c'est-à-dire, *la puissance est au poids comme le produit du pas de la vis par le rayon du treuil est au produit du rayon de la roue dentée par la circonférence que tend à décrire la puissance.*

*D'une machine nouvelle qu'on a nommée le* Genou.

**229.** Cette machine est composée de deux barres ou verges roides AO, BO (*fig.* 88 et 89), jointes en O par une charnière sur laquelle elles peuvent tourner comme les deux branches d'un compas. L'extrémité A de la première est liée par une autre charnière à une barre inébranlable AC, de sorte que cette branche AO est comme un levier dont l'appui fixe est au point A; mais l'extrémité B de la seconde branche ne fait que poser sur la barre inébranlable, ou plutôt elle est contenue dans la rainure fixe AC, le long de laquelle elle peut glisser librement.

Fig. 88 et 89.

Par la nature même de cet assemblage, il est évident que, si une puissance agit pour

faire tourner la branche OA autour du point A, et rapprocher ainsi le point O de l'axe fixe AC, l'angle O du genou tend à s'ouvrir, et le point B tend à s'éloigner de A en glissant dans la rainure AC. Donc, si l'on applique en B une force convenable en sens contraire, elle fera équilibre à la puissance; et c'est dans le rapport de ces deux forces que consiste la loi de cette machine, qui dépend, comme on voit, de la théorie du levier et du plan incliné.

Au lieu d'appliquer immédiatement la puissance P à la branche OA, on l'applique ordinairement à une barre *mn* solidement liée avec elle; et c'est à l'aide de cette barre *mn* qu'on agit sur le genou, pour exercer en B, le long de la rainure, l'effort Q ou la pression qu'on veut produire.

Supposons donc que la puissance P agisse au point *n*, perpendiculairement à la distance A*n*, ce qui est la position la plus favorable à l'action de cette puissance, et réduisons toute la figure aux lignes droites OA, OB, AC, A*n*, qui sont toutes dans un même plan avec les directions des forces appliquées.

Si l'on considère d'abord cette puissance P qui tend à faire tourner le levier AO autour du point A, et qu'on cherche avec quelle force X elle pousse le point O, et, par conséquent,

le point B, dans le sens OB, on verra, par la loi du levier, que ces deux forces P et X sont entre elles comme leurs bras de levier A$h$ et A$n$; de sorte qu'on aura $P : X :: Ah : An$; ou si l'on fait, pour abréger, le bras $An = r$, le côté $AO = a$, et, par conséquent, $Ah = a \sin O$; en désignant par O l'angle du genou, on aura plus simplement

$$P : X :: a \sin O : r.$$

Actuellement, cette force X, qui pousse B vers le plan incliné AC, est à la force Q, qui retient ce point le long du même plan, comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison OBA; de sorte qu'en nommant B cet angle, on a

$$X : Q :: 1 : \cos B;$$

et, multipliant par ordre, il vient

$$P : Q :: a \sin O : r \cos B,$$

proportion qui contient la loi cherchée de l'équilibre du genou.

**230**. On pourrait encore présenter la démonstration précédente d'une manière aussi simple et plus conforme à la méthode générale indiquée à la fin du n° **209**; car, le système étant supposé en équilibre, chaque partie doit être en équilibre d'elle-même, en vertu des

forces appliquées et de la réaction qu'elle éprouve de la part des autres parties. Ainsi, le levier OA doit être en équilibre en vertu de la puissance P et de l'action X du point B sur le point O de ce levier, action qui ne peut avoir lieu que dans le sens BO, et l'on a

$$P : X :: a \sin O : r.$$

Maintenant le point B doit être en équilibre de lui-même, en vertu de la force Q qui le tire le long du plan BA, et de la réaction du point O qui le pousse suivant OB contre ce même plan; et comme cette réaction est encore égale à X, on a, par la théorie du plan incliné,

$$X : Q :: 1 : \cos B,$$

ce qui redonne, en multipliant par ordre, la même proportion trouvée ci-dessus; d'où l'on tire

$$Q = \frac{Pr \cos B}{a \sin O},$$

pour l'expression de l'effort Q exercé par la puissance.

*Remarque.*

**231**. A mesure que l'angle B diminue, l'angle O du genou augmente; le facteur cos B croît donc sans cesse vers l'unité, et le facteur sin O

diminue vers zéro, de manière qu'ils peuvent approcher de ces limites d'aussi près qu'on voudra. Or, la résistance Q étant proportionnelle à cos B et réciproque à sin O, on voit, par cette double raison, que la force Q augmente à mesure que les deux côtés du genou s'approchent d'être en ligne droite, et qu'à cette limite elle serait infinie : ce qui veut dire qu'elle augmente sans bornes, et qu'ainsi la pression exercée par le genou, dans le sens de la rainure, peut devenir plus grande que toute pression donnée.

On voit encore que la puissance a d'autant plus d'avantage, que le côté AO $= a$ est plus court, et que le bras du levier A$n = r$ est plus considérable. Par cette dernière raison, il y aura de l'avantage, pour une même longueur de la barre $mn$, à implanter cette barre sur le côté le plus près qu'on pourra de l'angle du genou.

Si la puissance P, au lieu d'agir perpendiculairement sur la ligne A$n$, agissait sous un autre angle quelconque dans le même plan, il faudrait prendre, pour le bras de levier $r$, la distance de cette force au point fixe.

S'il y avait plusieurs forces pour faire tourner le levier AO, il faudrait mettre dans l'équation précédente, au lieu du moment P$r$, la somme des moments de toutes ces forces.

*Du Genou isocèle.*

**232.** Supposons que le triangle AOB soit isocèle, et qu'ainsi les angles A et B soient égaux : l'angle O devient le supplément de 2B, et l'on a $\sin O = 2 \sin B \cos B$. La proportion donnée plus haut pour l'équilibre devient donc

$$P : Q :: 2a \sin B : r,$$

ou bien, si l'on aime mieux introduire dans la proportion l'angle O des deux côtés du genou, comme l'angle B est complément de $\frac{O}{2}$, on aura $\sin B = \cos \frac{O}{2}$, ou simplement, $\sin B = \cos \varphi$, en faisant, pour simplifier, $\frac{O}{2} = \varphi$, et la proportion sera

$$P : Q :: 2a \cos \varphi : r,$$

ce qui donne une expression très-simple de la loi de l'équilibre.

Mais on peut encore, au lieu des sinus ou cosinus, n'employer que des lignes tirées de la construction de la machine; car il est évident que le terme $2a \sin B$, ou $2a \cos \varphi$, vaut deux fois la flèche $OI = f$ d'un arc de cercle qui serait conduit par AOB. Donc, si l'on voulait nommer simplement cette ligne OI la *flèche* du genou, la loi de l'équilibre pourrait s'énoncer de la manière suivante :

*Dans l'équilibre du genou dont les côtés sont égaux, la puissance qui tend à faire tourner le premier côté autour de son extrémité fixe est à la résistance que l'extrémité mobile du second côté éprouve dans le sens de la rainure, comme le double de la flèche du genou est au bras du levier par lequel agit la puissance.*

**233**. J'ai fait abstraction du poids des parties de la machine, mais il est bien aisé d'y avoir égard. Et d'abord, la barre AC étant supposée fixe, son poids G ne change en rien la proportion trouvée pour l'équilibre; il ne fait qu'ajouter à la pression de cette barre sur ses appuis. Mais le poids de la première branche AO, que je représente par $2p$, favorise l'action de la puissance; et si l'on suppose, par exemple, que l'axe AC soit vertical, et la branche AO d'une grosseur uniforme, de manière que son centre de gravité tombe au milieu de AO, il est évident que le poids $2p$ ajoute au moment $Pr$ de la puissance le moment $pf$. Enfin, le poids $2p$ de la seconde branche BO, que je suppose égal et appliqué de même au milieu de BO, peut se décomposer en deux forces égales, l'une $p$ appliquée en O, l'autre $p$ appliquée en B en sens opposé de Q. Or la première force $p$, à la distance $f$ du point fixe, ajoute

encore au moment de la puissance le moment $pf$, et la seconde, appliquée en B, diminue la force Q de $p$.

Ainsi, l'équation de l'équilibre, qui était

$$P.r = Q.2f,$$

devient, quand on a égard au poids de la machine,

$$P.r + pf + pf = (Q - p)\,2f,$$

ce qui donne

$$P.r = (Q - 2p)\,2f;$$

d'où l'on voit que le poids de la machine, dans la situation que je lui ai donnée, augmente l'effort Q d'une quantité $2p$ égale à la moitié du poids des deux branches mobiles du genou.

*Des pressions exercées sur les appuis.*

**234.** Quant aux pressions que souffre l'axe fixe AC, tant en vertu des forces appliquées que du poids de la machine, voici comment on peut les calculer.

Premièrement, cet axe est pressé au point B par une force perpendiculaire V, résultante de X et de $Q - p$, et dont la valeur est exprimée par $(Q - p)\cot\varphi$.

En second lieu, le point fixe A est pressé par le poids G de la barre AC et par la résultante de toutes les forces qui agissent sur la branche

AO, et qu'on transporterait parallèlement à elles-mêmes au point A. Or, qu'on décompose d'abord chacune de ces pressions en deux autres, l'une dirigée dans l'axe AC, l'autre perpendiculaire au même axe, on aura, pour les deux composantes de P, $P\cos\omega$ et $P\sin\omega$, $\omega$ étant l'inclinaison de P sur AC; pour les deux composantes de X, on aura $(Q-p)$ et V; enfin, pour les deux poids $2p$ et $p$ transportés en A, on aura la force $3p$ dirigée suivant l'axe AC. Donc, en réduisant, le point A souffrira, dans le sens de l'axe AC, une pression $\alpha$ égale à $G+P\cos\omega-Q+4p$; et dans une direction perpendiculaire, une pression $\beta$ égale à $P\sin\omega+(Q-p)\cot\varphi$. De sorte que la pression totale du point fixe sera exprimée en grandeur par $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, et sera inclinée sur l'axe AC d'un angle dont la tangente sera $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ainsi, l'on saura avec quelle force l'axe du genou doit être retenu en A et en B, pour n'être pas entraîné par l'action combinée des forces appliquées et du poids de la machine.

**235.** J'ai cru devoir expliquer cette machine nouvelle avec assez de détail, parce qu'elle m'a paru ingénieuse, et qu'elle n'est encore démontrée nulle part. Elle est à peu près du même

genre que la vis, mais d'une construction beaucoup plus simple : on peut s'en servir de la même manière, pour exercer, à l'aide d'une puissance médiocre, des pressions très-considérables, ou pour former sur certains corps de fortes et vives empreintes.

*Sur un ancien paradoxe de Statique relatif à la théorie des moments.*

**236.** La loi du levier, comme on l'a vu plus haut, et comme on le sait depuis longtemps, est que les deux forces appliquées soient réciproques à leurs distances au point d'appui, et qu'ainsi les moments de ces forces soient égaux entre eux pour l'équilibre.

Or il y a une machine singulière, dont l'idée est due à Roberval, et qui présente une espèce de levier où deux poids égaux se font toujours équilibre, quoiqu'on les suspende à des bras de levier quelconques inégaux; et de là résulte, dans la théorie des moments, une espèce de paradoxe, qu'on a tâché de résoudre par une certaine décomposition de forces, mais dont il me semble qu'on n'a point encore donné la véritable explication. (*Voyez* l'article de d'Alembert, au mot LEVIER dans l'*Encyclopédie.*)

Cependant on pouvait reconnaître d'abord que ce cas d'équilibre n'a rien de contraire

à la loi générale du levier; car la machine de Roberval n'est point un véritable levier, c'est-à-dire un corps ou une verge *roide* mobile autour d'un *seul* point fixe : c'est un assemblage ou système de figure *variable*, dans lequel il y a *deux* points fixes, et où il n'est pas du tout surprenant que la condition de l'équilibre soit tout autre que dans le levier simple. Ainsi, par cette seule distinction que nous avons établie entre une machine simple et une machine composée, le paradoxe s'évanouit. Mais on n'avait point encore une définition bien précise des machines, ni surtout une idée nette des *moments*, efforts d'un certain genre que les *couples* seuls ont mis en évidence, et pour ainsi dire rendus sensibles dans toute la mécanique. Et, en effet, par cette théorie des couples, la machine de Roberval n'offre pas même de difficulté : car, à l'aide des deux points fixes qui existent dans le système, il peut très-bien arriver que chacun des couples qui viennent des deux forces appliquées se trouve séparément détruit par la résistance de ces points, et que, dans une pareille machine, le rapport des moments soit tout à fait arbitraire. C'est, en effet, ce qui a lieu, comme on va le voir tout à l'heure : et ce cas singulier d'équilibre, loin d'offrir un paradoxe, n'est qu'une nouvelle confirmation de

nos principes; et je ne m'y arrête un instant que pour en donner, par les couples, la démonstration la plus claire, et peut-être la seule exacte qu'on en ait encore présentée jusqu'ici.

### *De la Balance de Roberval.*

**237.** Imaginez quatre règles deux à deux, égales et parallèles, et formant un parallélogramme AB*ab* (*fig.* 90 et 91), dont les côtés soient mobiles autour des angles A, B, *a*, *b*, comme sur des charnières. Supposez que les milieux F et *f* des deux côtés AB, *ab*, soient fixes, et, pour plus de clarté, que ces deux points tombent dans la même verticale F*f*; vous aurez une machine formée par la réunion de deux balances égales et parallèles, qui se répondent dans un même plan vertical, et dont tous les mouvements autour de leurs appuis se suivent sans se nuire en aucune manière : car si l'une d'elles, AB par exemple, tourne autour de son appui fixe F, l'autre *ab* tourne en même temps sur le sien, dans le même sens et d'une même quantité angulaire; et le parallélogramme AB*ab* prend toutes les figures qu'il peut affecter, en changeant ses angles, sans changer la longueur de ses côtés. Fig. 90 et 91.

Si donc, à l'un de ces leviers tel que AB, et

en des points quelconques de ce levier, ou même de son prolongement, étaient appliquées deux forces qui se fissent équilibre, il faudrait nécessairement que ces deux forces fussent réciproques à leurs distances au point d'appui F, comme si le levier AB était seul et parfaitement libre; car ce levier est libre en effet, puisque l'autre *ab* ne fait que suivre, et, pour ainsi dire, répéter ses mouvements, sans y porter la moindre altération. Ainsi, les moments devraient être égaux de part et d'autre autour du point fixe F, et il n'y aurait là rien qui ne fût entièrement d'accord avec la théorie.

Mais si, au lieu d'appliquer les forces ou les deux poids P et Q à l'un de ces leviers, on les applique, le premier P, à une barre KI invariablement fixée à angle droit sur le côté B*b* qui unit les deux balances, le second Q à une barre GH, fixée de même sur le côté A*a*, on trouve que ces deux poids, pourvu qu'ils soient égaux, se font toujours équilibre, quelles que soient les longueurs des bras IK et GH où ils sont suspendus, et c'est ce qu'il faut montrer ici comme une conséquence toute naturelle de notre théorie des moments.

Pour cela, qu'on transporte la force P parallèlement à elle-même de I en K dans la droite B*b*, et l'on a un couple (P, — P) dont le bras

de levier est IK. Mais ce couple est détruit par les deux points fixes; car il peut d'abord être changé en un autre équivalent d'un bras égal à la distance *mn* des deux balances AB et *ab*; ensuite, comme le bras KI est invariablement attaché au côté B*b*, par l'hypothèse même, ce couple transformé (P′, — P′) peut être tourné dans son plan, et appliqué exactement sur le côté B*b*. Dans cette position, l'une des forces P′ se dirige vers le point F qui est fixe, l'autre — P′ se dirige vers l'autre point fixe *f*, et le couple est détruit, quel que soit son moment P′ × *mn* ou P × IK. Ainsi, il ne reste, de ce côté de la machine, que la force P transportée au point K.

Pareillement, la force Q peut être transportée parallèlement à elle-même de G en H, et le couple (Q, — Q) qu'elle produit, pouvant être changé en un autre (Q′, — Q′) appliqué sur le côté A*a*, se trouve détruit, comme le précédent, par la résistance des deux points fixes.

Il ne reste donc que les deux forces P et Q, mais appliquées maintenant aux points K et H, ou, si l'on veut, en B et A, et qui, par l'équilibre de la balance AB, doivent être parfaitement égales entre elles. Ainsi, dans la balance de Roberval, la condition unique pour l'équilibre est l'égalité des deux poids, quelles

que soient leurs distances aux points d'appui.

Cette machine est en quelque sorte, pour les simples forces, ce que le levier ordinaire est pour les couples ou moments. Dans l'équilibre du levier, les deux forces peuvent être dans un rapport quelconque; il suffit que les moments soient égaux : mais, dans la balance de Roberval, il faut que les forces soient égales, et c'est le rapport des moments qui est arbitraire.

**238.** Au reste, ceci n'est qu'un cas particulier d'une proposition plus générale; car, au lieu de deux balances AB et *ab*, on pourrait considérer deux leviers égaux et parallèles, dont les appuis F et *f* ne soient plus au milieu de leurs longueurs, mais divisent ces lignes dans un même rapport quelconque. De plus, on pourrait supposer que les forces P et Q, qui agissent sur les barres IK, GH, ne soient point parallèles, mais dirigées comme on voudra dans le même plan. On démontrerait exactement de la même manière que, les deux forces P et Q étant transportées parallèlement à elles-mêmes aux deux bouts B et A de l'un des deux leviers AB de la machine, les deux couples qui naissent de cette translation sont séparément détruits par les points fixes; que, par conséquent, la condition unique pour l'équi-

libre est que les deux forces appliquées soient entre elles dans un rapport constant, qui ne dépend point de leurs distances au point F, mais uniquement des distances de ce point aux deux parallèles à ces forces, menées par les deux bouts du levier. Ainsi, quand deux forces sont une fois en équilibre sur cette machine, on peut les transporter où l'on veut parallèlement à elles-mêmes, sans que l'équilibre soit troublé. Elles réagissent toujours l'une sur l'autre de la même manière. La seule chose qui change est la grandeur des couples détruits, et, par conséquent, la pression que souffrent en sens contraires les deux points fixes dans la direction des deux leviers.

Par exemple, dans le cas de P et Q parallèles, le point F, outre la pression verticale $P + Q$ qu'il supporte, comme dans le levier ordinaire, éprouve encore, dans le sens du levier, une pression $P' - Q'$, égale à $\frac{P \times KI}{mn} - \frac{Q \times GH}{mn}$; et l'autre point fixe $f$ éprouve une pression égale et parallèle, et de sens contraire : de sorte qu'il y a, sur l'axe $Ff$ qui joindrait les points fixes, un couple dont le moment est $P \times KI - Q \times GH$, c'est-à-dire égal à la différence des moments des forces appliquées, et qui tend à renverser la machine.

# MÉMOIRE

SUR

# LA COMPOSITION DES MOMENTS

ET DES AIRES

# DANS LA MÉCANIQUE.

---

*Des Couples.*

Dans ma *Statique*, j'ai nommé *couple* l'ensemble de deux forces parfaitement égales, parallèles et de sens opposés. On sait que ces deux forces n'ont pas de résultante, c'est-à-dire ne peuvent être tenues en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace. A la vérité, le calcul qui donne, pour cette résultante, une force nulle appliquée à une distance infinie des composantes, ne nous apprend plus rien alors, puisqu'il donne la même expression pour deux autres forces quelconques égales, parallèles et de sens opposés, dont l'effet pourtant n'est pas le même que celui des deux premières; mais il est évident, à priori, que de telles forces ne peuvent avoir de résultante unique : car, si l'on pouvait assigner la position de cette résultante à l'égard de l'une des forces du couple, on lui en trouverait sur-le-champ une autre parfaitement symétrique et de sens contraire à l'égard de la seconde;

et elle aurait à la fois deux positions différentes, ce qui est absurde.

L'effort d'un couple ne peut être contre-balancé que par celui d'un autre couple. J'ai fait voir que cet effort a pour mesure le produit de l'une des forces par la distance qui les sépare ; de sorte qu'en nommant ce produit le *moment* du couple, deux couples contraires se font équilibre quand leurs moments sont égaux.

*Composition des couples, analogue à la composition des forces.*

J'ai d'ailleurs établi sur les couples tous les théorèmes qui correspondent à la composition des forces ; et même cette proposition (dont on fait si souvent usage), qu'une force peut être transportée en un point quelconque de sa direction, trouve ici son analogue, qui consiste en ce qu'*un couple peut être transporté partout où l'on voudra dans son plan, ou dans tout autre plan parallèle, et tourné comme on voudra dans ce plan, sans que son effet en soit changé.*

Ainsi, des couples situés arbitrairement dans le même plan, ou dans des plans parallèles, sont des couples de même direction ; d'où l'on voit combien est illusoire l'expression que donne le calcul pour la résultante d'un couple, puisque, d'après cette propriété, il n'y aurait pas de lieu de l'espace où l'on ne pût la supposer appliquée ; ce qui n'a plus aucun sens.

Mais la proposition précédente est principalement utile dans la composition des couples, où elle permet de les rapprocher et de les disposer entre eux de la manière la plus favorable à la démonstration, et nous conduit par une voie très-simple aux théorèmes suivants :

1°. *Deux couples situés d'une manière quelconque dans le même plan, ou dans deux plans parallèles, se composent en un seul égal à leur somme ou à leur différence, selon que ces deux couples sont de même sens ou de sens contraires.*

2°. *Deux couples situés d'une manière quelconque dans deux plans perpendiculaires aux deux côtés d'un parallélogramme, et représentés en grandeur par ces côtés, se composent en un seul situé dans un plan perpendiculaire à la diagonale, et représentés en grandeur par cette diagonale.*

D'où l'on peut conclure que : *Trois couples perpendiculaires aux trois arêtes contiguës d'un parallélipipède quelconque, et représentés, pour leurs moments, par les longueurs de ces arêtes, se composent en un seul, perpendiculaire à la diagonale, et représenté pour son moment par la longueur de cette diagonale.*

Ces théorèmes, comme nous le verrons tout à l'heure, renferment la théorie des moments, considérée de la manière la plus générale, et la théorie des aires, qui ne sont autre chose, dans le mouvement des corps, que les moments des forces qui les animent; mais ils se démontrent avec autant de simplicité que le parallélogramme des forces, et font descendre ainsi dans les Éléments les propositions les plus élevées de la Mécanique.

Qu'on me permette ici d'en rappeler en peu de mots l'usage dans la Statique, et, sans cesser de tendre vers l'objet de ce Mémoire, d'y arriver dans l'ordre naturel de nos idées.

## I.

### *Usage des Couples dans la Statique.*

Une force étant appliquée en un point d'un corps ou système quelconque solide, si l'on prend un autre point quelconque dans ce corps, ou au dehors, pourvu qu'on l'y suppose invariablement attaché, et qu'on applique à ce nouveau point deux forces contraires égales et parallèles à la première, il est clair que l'état du corps ne sera pas changé; mais on pourra considérer actuellement, au lieu de la simple force proposée, 1° une force parfaitement égale, parallèle et de même sens, appliquée au nouveau point; 2° un couple formé par les deux forces parallèles restantes. Si, pour plus de clarté, on transporte ce couple ailleurs, dans un plan quelconque parallèle au sien, ce qui est permis, il ne restera au point dont il s'agit qu'une force parfaitement égale et parallèle à la force primitive, et qui ne serait en quelque sorte que cette même force qu'on y aurait transportée parallèlement à elle-même,

On peut donc dire qu'une force peut être transportée parallèlement à elle-même en un point quelconque, pourvu que l'on considère le couple qu'elle engendre dans cette translation, et qui a pour mesure le produit de la force par le chemin qu'elle a parcouru.

Cela posé, tant de forces que l'on voudra étant appliquées d'une manière quelconque à un corps, si on les transporte toutes parallèlement à elles-mêmes en un même point quelconque, elles viendront s'y composer en une seule que je nommerai la *résultante*, et tous

les couples qu'elles ont produits dans leur translation se composeront en un seul, que je nommerai le *couple résultant*.

*Composition générale des forces.*

Ainsi, *des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace peuvent toujours se réduire à une seule, et à un couple unique, lesquels sont, en général, situés dans des plans différents.* Sur quoi l'on peut observer que la direction, la quantité et le sens de la résultante seront toujours les mêmes en quelque lieu qu'on ait pris l'*origine*, c'est-à-dire le point où l'on a transporté toutes les forces. En variant la position de ce point, la résultante ne fera que se transporter parallèlement à elle-même en divers lieux de l'espace; mais le plan et la valeur du couple changeront nécessairement.

*Lois de l'équilibre.*

Mais, quelle que soit la position de l'origine, un couple ne pouvant jamais être tenu en équilibre par aucune simple force dirigée comme on voudra dans l'espace, il résulte de ce que nous venons de dire qu'il ne pourra jamais y avoir équilibre entre les forces, à moins que la résultante et le couple résultant ne soient tous les deux nuls à la fois.

*Ainsi, toutes les forces appliquées au corps, étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque, doivent s'y faire équilibre entre elles, et tous les couples qu'elles produisent en se transportant en ce point doivent aussi se faire équilibre entre eux.*

Telles sont les propriétés générales de l'équilibre, c'est-à-dire les conditions qui existent nécessairement dans l'équilibre de tout système libre. Elles fournissent les six équations connues, entre les forces décomposées suivant trois axes quelconques dans l'espace, et entre les couples décomposés suivant trois plans différents qu'on peut supposer conduits par ces axes.

*A quoi se réduisent les conditions précédentes quand il y a un point fixe dans le système.*

Ces trois dernières équations suffisent, lorsqu'il y a un point fixe dans le système, en supposant qu'on ait pris ce point pour l'origine : car la résultante, se trouvant détruite par sa résistance, peut avoir telle valeur qu'on voudra, et il suffit que le couple résultant soit nul. On voit bien nettement par là que la pression exercée sur le point fixe est identiquement la même que si toutes les forces du système y étaient transportées parallèlement à leurs directions, car elles y sont actuellement transportées ; et pour les couples qu'elles ont produits, comme ils doivent être en équilibre d'eux-mêmes, c'est-à-dire quand bien même le corps ne serait pas soutenu, il est évident qu'ils ne peuvent nullement charger le point fixe.

*Propriété nouvelle de l'équilibre d'un corps solide.*

Lorsque des forces sont en équilibre autour d'un système quelconque invariable de forme, on sait qu'elles peuvent toutes varier proportionnellement à leurs grandeurs sans cesser de se faire équilibre. Mais on voit ici

qu'elles peuvent encore s'approcher ou s'éloigner toutes d'un même point quelconque, proportionnellement à leurs distances à ce point, sans que cet équilibre soit troublé : car, si chaque force se meut ainsi parallèlement à elle-même, dans le plan formé par sa direction et le point dont il s'agit, elle augmente ou diminue le couple qu'elle donne à son égard, dans le même rapport que sa distance à ce point, et, par conséquent, tous les couples du système conservent leurs positions, et demeurent proportionnels. Ainsi, la résultante et le couple résultant, étant une fois nuls, le seront toujours, et l'équilibre subsistera.

*Condition nécessaire pour qu'un système quelconque de forces ait une résultante unique.*

Les forces appliquées au système étant ramenées, comme nous venons de le voir, à une seule force et à un seul couple, si la force se trouve parallèle au plan du couple, on pourra amener ce couple dans un même plan avec elle, et les réduire tous deux à une force unique : et réciproquement, comme on a démontré qu'une force et un couple ne peuvent se réduire à une force unique sans être dans le même plan ou dans des plans parallèles, ce qui est ici la même chose, il s'ensuit que *des forces dirigées d'une manière quelconque dans l'espace ne peuvent jamais se réduire à une seule, à moins que la résultante de toutes ces forces transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque n'ait une direction parallèle au plan du couple résultant.*

C'est par là qu'on peut voir comment trois forces diri-

gées dans des plans différents peuvent se composer en une seule, sans qu'il y ait aucune rencontre entre leurs directions, et comment une force peut se décomposer suivant trois directions qui ne rencontrent pas la sienne et qui ne se rencontrent pas entre elles.

*Expression analytique des propriétés précédentes.*

Pour soumettre les propositions précédentes au calcul, concevons à l'origine où l'on transporte toutes les forces, trois axes quelconques, que nous prendrons rectangulaires entre eux, pour plus de simplicité dans les expressions.

Soient R la résultante générale; X, Y, Z ses trois composantes suivant les axes des $x$, $y$, $z$; soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les trois angles respectifs que sa direction forme avec eux.

On aura, par le parallélipipède des forces,

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

et

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Or X, Y, Z sont respectivement égales aux sommes des forces décomposées parallèlement aux trois axes des $x$, $y$, $z$. On trouvera donc facilement par ces équations la valeur et la direction de la résultante générale. La première condition de l'équilibre, qui veut que cette résultante soit nulle, donnera ce qu'on nomme les trois équations de l'équilibre de *translation*, qui reviennent à ce que la somme des forces estimées suivant trois axes quelconques soit nulle d'elle-même par rapport à chacun de ces axes.

Soient G le moment du couple résultant; L, M, N les moments respectifs des trois couples dans lesquels il se décompose perpendiculairement aux trois axes des $x$, $y$, $z$; soient $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les trois angles que forme avec ces axes la perpendiculaire au plan de ce couple, et que nous avons nommée l'*axe* du couple.

On aura, par le parallélipipède des couples,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

et

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G}.$$

Or on voit (nos **102** et **103** de la *Statique*) que les couples L, M, N sont respectivement égaux aux sommes des moments pris dans l'acception ordinaire par rapport aux trois axes $x$, $y$, $z$, c'est-à-dire aux sommes des produits qui résultent des forces projetées sur chacun des plans coordonnés, multipliées par leurs distances à l'axe qui lui est perpendiculaire : on trouvera donc facilement, par les équations ci-dessus, la valeur et la position du couple résultant.

La seconde condition générale de l'équilibre, qui veut que ce couple soit nul, donnera ce qu'on appelle les équations de l'équilibre de *rotation*, qui consistent en ce que la somme des moments de toutes les forces, par rapport aux trois axes coordonnés, soit nulle d'elle-même relativement à chacun de ces axes.

*Que ces sortes de produits, qu'on appelle* moments, *n'étaient au fond que la mesure de certaines forces cachées que les couples ont mises en évidence.*

On voit ici, par l'identité des couples avec les mo-

ments tels qu'on les considère ordinairement en Statique, quel rôle jouent ces sortes de produits dans la composition générale des forces et dans les lois de leur équilibre. A la vérité, dans l'équilibre d'un corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe, les lois connues du levier nous montraient bien ces produits comme les efforts des puissances pour faire tourner le corps autour de cet axe, puisque l'on trouvait que la somme des moments des forces qui tendent à faire tourner dans un sens doit être égale à la somme des moments de celles qui tendent à faire tourner dans le sens contraire. Mais, lorsqu'il n'y avait aucun point d'appui, et que le système était parfaitement libre dans l'espace, les moments ne restaient plus dans les conditions de l'équilibre que comme de simples expressions de calcul, et perdaient cette espèce de signification que leur donne la présence d'un axe fixe, et qui les avait fait nommer *moments* par les anciens géomètres. Or, par la théorie des couples, ils reparaissent dans l'équilibre des corps libres, comme dans l'équilibre des corps gênés par des obstacles. Estimés par rapport à un point quelconque du corps, ils mesurent certains efforts particuliers que l'on peut concevoir comme engendrés par les puissances qui se transportent parallèlement à elles-mêmes en ce point, et qui, tandis que ces puissances s'y composent et s'y font équilibre à leur manière, doivent aussi se composer et se faire équilibre à la leur. Ce n'est pas qu'au fond, les valeurs des moments et des couples ne soient parfaitement les mêmes. L'analyse n'a pour objet que de simples rapports, et les diverses grandeurs, sous ses formules, ne conservent plus aucune trace des premières idées

qu'on y avait jointes. Mais, en Géométrie comme en Algèbre, la plupart des idées différentes ne sont que des transformations; les plus lumineuses et les plus fécondes sont pour nous celles qui font le mieux image, et que l'esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans le calcul: or les couples ont éminemment cet avantage sur les moments; et si l'on considère que la théorie des moments se présente d'elle-même dans la réduction générale des forces et dans les conditions de leur équilibre; que, d'un autre côté, dans la Dynamique, la composition des mouvements de rotation est aussi nécessaire que celle des mouvements de translation pour l'analyse complète du mouvement d'un corps de grandeur sensible, on verra que la composition des couples exposée ci-dessus, tant par la symétrie des théorèmes que par la simplicité des démonstrations, vient se ranger naturellement à côté de la composition des forces, et forme ainsi la seconde partie essentielle des Éléments.

*Équation de condition pour qu'un système de forces ait une résultante unique.*

Nous avons vu tout à l'heure que si des forces quelconques sont réductibles à une seule, la résultante générale sera parallèle au plan du couple résultant. Pour exprimer cette condition dans le calcul, il n'y a donc qu'à exprimer que l'axe du couple est perpendiculaire à la direction de la résultante, ou que le cosinus de leur inclinaison mutuelle est nul. Mais, d'après les dénominations précédentes, le cosinus de cet angle est

$$\cos\alpha.\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma.\cos\nu;$$

expression qui, étant égalée à zéro, après y avoir substitué à la place des cosinus leurs valeurs, donne sur-le-champ l'équation

$$XL + YM + ZN = 0,$$

qui établit la relation cherchée entre les forces et leurs moments estimés par rapport aux trois axes.

*Équations de condition pour qu'il y ait une résultante unique qui passe en un point donné.*

Mais si l'on voulait exprimer que les forces sont réductibles à une seule qui passe en un point donné, on transporterait l'origine en ce point, et l'on exprimerait que le couple résultant y est nul. Ainsi, $a$, $b$, $c$ étant les coordonnées de la nouvelle origine, il suffirait, dans les expressions L, M, N, de mettre $x - a$, $y - b$, $z - c$, à la place de $x$, $y$, $z$; ce qui donnerait les nouveaux moments L′, M′, N′, et l'on aurait les trois équations

$$L' = 0, \quad M' = 0, \quad N' = 0,$$

qui nous font voir que la somme des moments doit être nulle par rapport à trois axes qui se croisent au point donné.

Si le point n'est pas donné, et qu'on cherche au contraire s'il y a dans l'espace quelque point où les forces peuvent donner un couple nul, on aura les trois mêmes équations, mais où $a$, $b$, $c$ seront alors les inconnues. Or, en les éliminant, on trouvera d'abord, entre les forces proposées, l'équation de condition $XL + YM + ZN = 0$, sans laquelle les trois premières ne peuvent subsister, et qui nous redonne ainsi la condition d'une résultante unique, comme cela doit être.

## II.

*Des couples ou moments rapportés à différents axes.*

Le couple résultant G, décomposé perpendiculairement à un axe qui forme avec le sien un angle $\theta$, étant égal à $G \cos \theta$; si l'on nomme $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ les trois angles que cet axe forme avec ceux des coordonnées, comme on a, par la Géométrie,

$$\cos \theta = \cos \lambda \cos \lambda' + \cos \mu \cos \mu' + \cos \nu \cos \nu',$$

on trouvera

$$G \cos \theta = L \cos \lambda' + M \cos \mu' + N \cos \nu',$$

formule très-simple qu'Euler a donnée dans le tome VII des *Nouveaux Actes de Pétersbourg*, mais à laquelle il n'était parvenu que par de longs circuits d'analyse. Cette équation nous apprend que *si l'on connaît les sommes* L, M, N, *des moments par rapport à trois axes rectangulaires, on trouvera sur-le-champ la somme des moments par rapport à un axe quelconque, en multipliant ces trois sommes respectives par les cosinus des angles que les trois axes font avec le nouvel axe donné.*

C'est ainsi qu'en Géométrie, pour projeter une ligne sur un axe quelconque, on peut d'abord projeter cette ligne sur trois axes rectangulaires; projeter ensuite ces trois projections sur l'axe donné, et ajouter ensemble ces projections de projections.

*Du moment* maximum *entre les moments rapportés aux différents axes qui passent par un même point.*

Puisque la somme des moments, par rapport à un axe

qui fait, avec celui du couple résultant, un angle $\theta$, est $G \cos \theta$, il s'ensuit :

1°. *Que, de tous les axes qui passent par l'origine, l'axe du couple résultant est celui par rapport auquel la somme des moments est la plus grande ;*

2°. *Que la somme des moments est la même par rapport à tous les axes qui font un même angle avec celui du plus grand moment, ou qui forment une surface conique décrite autour de lui sous cet angle ;*

3°. *Que la somme des moments est nulle par rapport à tous ceux qui font cet angle droit, ou qui forment un plan perpendiculaire à sa direction.*

L'axe et la valeur du moment *maximum* ne sont autre chose que l'axe et la valeur du couple résultant, et se déterminent par les mêmes équations. D'où l'on voit que *le carré du moment* maximum *est égal à la somme des carrés des moments par rapport à trois axes rectangulaires, et que son axe est la diagonale du parallélipipède construit sur les trois lignes qui représenteraient sur ces axes les grandeurs respectives des trois moments précédents.*

Ce sont les résultats que Laplace avait déjà tirés de l'Analyse ; ils formaient de beaux *théorèmes* de Mécanique, et ils ne sont plus ici que des *corollaires évidents* de la composition des couples.

Mais voici de nouvelles conséquences, entièrement dues à nos principes, et qui achèvent toute la théorie des moments.

*Du moment* minimum *entre l'infinite des moments* maxima *relatifs à tous les points de l'espace.*

Observons que tout ce que nous venons de dire est relatif à l'origine que l'on a choisie pour y transporter toutes les forces. En prenant cette origine ailleurs, la quantité, le sens de la résultante générale, ne changent pas, et sa direction demeure toujours parallèle à elle-même; mais le moment *maximum* varie de grandeur, et son axe s'incline sur sa première position. Pour chacun des points de l'espace, considérés successivement comme origines, il y a donc un axe autour duquel la somme des moments est un *maximum* relativement à tous les axes qui se croisent au même point. On pourrait donc demander en quel lieu il faudrait prendre l'origine ou le centre des moments, pour que le moment *maximum* y fût plus petit que partout ailleurs, et, par conséquent, fût le *minimum* des moments *maxima* relativement à tous les points de l'espace.

Pour trouver facilement la position de ce point, regardons toutes les forces comme réduites à une seule et à un couple, par rapport à un point quelconque connu, et suivons les variations qu'éprouve ce couple par le déplacement de l'origine.

D'abord il est visible qu'en déplaçant l'origine dans la direction même de la résultante générale, le couple résultant ne change pas; car le couple que fournit la résultante en se transportant en un autre point de sa propre direction est nul de lui-même, et le couple primitif n'est pas altéré. Nous voyons donc que *les moments* maxima *sont constants pour toutes les origines*

*prises le long d'une même droite parallèle à la direction de la résultante générale, et que leurs axes sont parallèles entre eux.* Ainsi, tout ce que nous avons dit plus haut des moments par rapport aux axes qui se croisent en un même point subsiste de la même manière et avec les mêmes valeurs, pour tous les points de la direction de la résultante qui y passe.

Supposons donc que l'origine s'écarte de cette direction, et soit tellement placée dans l'espace, que le couple résultant soit perpendiculaire à la direction de la résultante : je dis qu'alors ce couple est dans la position du *minimum ;* car si l'on déplace actuellement l'origine d'une manière quelconque, il ne pourra qu'augmenter. En effet, la résultante, en changeant de position, produira un couple perpendiculaire sur le premier ; et puisque ces deux couples sont rectangulaires, ils donneront par leur composition le nouveau couple résultant plus grand que l'un ou l'autre d'entre eux : donc le premier couple résultant aura augmenté ; donc il se trouvait dans la position du *minimum* lorsqu'il était perpendiculaire à la direction de la résultante générale, ou lorsque son axe coïncidait avec elle.

*Comment on détermine l'axe du couple* minimum.

Soient donc G une ligne qui représente à la fois l'axe et la valeur du couple résultant par rapport à un point connu ; R une autre ligne qui représente la valeur et la direction de la résultante en ce point ; $\varphi$ l'angle que forment ces deux droites.

Pour avoir l'origine du couple résultant *minimum*, il faudra transporter la résultante R parallèlement à

elle-même, de telle sorte et d'une telle quantité $p$, que le couple R$p$ qu'elle produira, étant composé avec le couple primitif G, forme un couple résultant dont l'axe soit R.

L'axe du couple R$p$ doit donc être dans le plan des deux lignes R et G qui font un angle $\varphi$; d'ailleurs, il est nécessairement perpendiculaire à la direction R; donc on aura, par le parallélogramme des couples,

$$Rp = G \sin \varphi,$$

et, pour la valeur K du couple *minimum*,

$$K = G \cos \varphi.$$

Ainsi, en élevant au sommet de l'angle $\varphi$, et sur le plan de cet angle, une perpendiculaire $p = \frac{G \sin \varphi}{R}$, et menant par l'extrémité de cette perpendiculaire une parallèle à la direction de la résultante générale, on aura l'axe du *minimum* des moments *maxima*, et l'origine pourra être prise partout où l'on voudra sur cet axe.

Si l'on veut tout rapporter aux trois axes coordonnés, soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les inclinaisons de R sur ces axes, et $\lambda$, $\mu$, $\nu$ celles de G sur les mêmes lignes; on aura, pour l'inclinaison mutuelle $\varphi$ de R et G,

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu;$$

ou bien, en mettant, au lieu des cosinus, leurs valeurs données précédemment,

$$\cos \varphi = \frac{XL + YM + ZN}{RG};$$

d'où l'on tire

$$K = \frac{XL + YM + ZN}{R},$$

expression très-simple de la valeur du couple *minimum* K.

Actuellement, soient $a$, $b$, $c$ les trois coordonnées de l'extrémité de la perpendiculaire $p$; on aura d'abord $a^2 + b^2 + c^2 = p^2$, qui donne, en mettant pour $p$ sa valeur,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{G^2 - K^2}{R^2}.$$

Ensuite, comme $p$ est à la fois perpendiculaire à R et à G, il est clair qu'on aura

$$aX + bY + cZ = 0,$$
$$aL + bM + cN = 0;$$

ce qui fait trois équations au moyen desquelles on pourra déterminer $a$, $b$, $c$, et, par conséquent, la position de l'axe du couple *minimum* dans l'espace.

### *De l'axe* central *des moments.*

Cet axe remarquable, où la somme des moments est à la fois un *maximum* relativement aux axes qui se croisent au même point que lui, et un *minimum* relativement à ceux qui donnent les moments *maxima* aux divers points de l'espace, pourrait se nommer l'axe *central* des moments; et cette dénomination, déjà motivée en ce qu'il jouit d'une propriété exclusive par rapport à tous les autres, se trouve pleinement justifiée, si l'on observe qu'aux mêmes distances autour de lui, les moments *maxima* sont les mêmes, et que leurs axes ont, à son égard, des positions semblables.

En effet, le même raisonnement qui nous a fait passer

tout à l'heure du couple résultant G au couple *minimum* K, nous ramène, dans l'ordre inverse, de celui-ci au premier, et par les mêmes équations,

$$Rp = G \sin \varphi, \quad \text{et} \quad K = G \cos \varphi.$$

Mais ici, de quelque côté qu'on transporte la résultante R, pourvu que ce soit à une même distance $p$ de sa position actuelle ou de l'axe *central*, on trouvera toujours un couple résultant G de même valeur, et une même inclinaison $\varphi$ entre son axe et la résultante; et, de plus, le plan de ces deux droites sera toujours perpendiculaire à la ligne $p$: puisque, si tout cela n'avait pas lieu comme ci-dessus, en ramenant la résultante dans l'axe central, on ne retrouverait plus le même couple *minimum* K, ce qui ne peut pas être.

*Les moments* maxima *sont donc constants, non-seulement pour toutes les origines prises le long d'une parallèle à la résultante, comme nous l'avions déjà remarqué, mais encore pour toutes les origines prises sur le cylindre que décrirait cette droite autour de l'axe central qui lui est parallèle.*

*Pour les axes de ces moments, tant que l'origine ne sort pas d'une même génératrice de ce cylindre, ils demeurent parallèles entre eux et forment un plan; mais si l'origine passe d'une génératrice à l'autre par la circonférence d'un cercle, ils forment une hyperboloïde de révolution autour de l'axe central.*

Les moments *maxima* G ne varient donc qu'avec les distances $p$ de leurs origines à l'axe central, et les deux équations précédentes nous donnent

$$G^2 = R^2 p^2 + K^2,$$

équation qui nous fait voir que ces moments croissent, pour les origines prises à différentes distances de l'axe central, comme les ordonnées d'une hyperbole dont ces distances seraient les abscisses : ainsi leurs valeurs augmentent sans bornes, et il n'y a pas de moment *maximum maximorum ;* ce qui était d'ailleurs assez évident de soi-même.

On a, de plus, $\tang \varphi = \frac{Rp}{K}$, ce qui donne les inclinaisons des axes des moments *maxima* sur l'axe central, et nous montre que leurs tangentes varient dans le rapport des distances de leurs origines à cet axe.

Remarquons encore que, dans le cas où la résultante générale est nulle, on a, par la première équation, $G = K$, quelle que soit la valeur de $p$.

Lors donc que les forces appliquées sont telles, qu'étant transportées en un même point, elles se font équilibre entre elles, les moments *maxima* sont les mêmes pour tous les lieux de l'espace, et leurs axes sont tous parallèles.

Si les forces appliquées ont une résultante unique, comme on a pour cette condition $\cos \varphi = 0$, l'équation $K = G \cos \varphi$ donne $K = 0$; c'est-à-dire que le moment *minimum maximorum* est nul, comme il est clair que cela doit être, puisque l'origine tombe alors sur la direction même de la seule force à laquelle se réduisent toutes celles du système.

*Classification de tous les axes de l'espace auxquels on voudrait rapporter les moments d'un système de forces.*

Telle est donc la théorie générale exposée ci-dessus, que tous les axes de l'espace auxquels on peut rapporter

les moments d'un système quelconque de forces peuvent être distingués et classés entre eux de la manière suivante :

D'abord, si, pour simplifier les choses, nous ne considérons que les axes qui se croiseraient aux divers points qu'on peut prendre sur un même plan perpendiculaire à la direction de la résultante, nous observons :

1°. Que, parmi tous les axes qui se croisent en un même point, il y en a un seul distingué de tous les autres, en ce que la somme des moments y est un *maximum*.

Les autres se classent autour de lui en diverses surfaces coniques circulaires dont il serait l'axe commun. Pour tous ceux qui forment la même surface, les moments sont égaux, et ils varient d'un cône à l'autre en raison des cosinus des angles sous lesquels ces cônes sont décrits.

2°. Parmi tous les axes qui donnent les moments *maxima* relativement aux divers points du plan, il y en a un seul distingué de tous les autres, en ce qu'il donne le plus petit de ces *maxima*, ou le *minimum maximorum* des moments.

Les autres axes des *maxima* se classent autour de lui en diverses surfaces d'hyperboloïdes de révolution dont il serait l'axe commun. Pour tous ceux qui forment la surface d'un même hyperboloïde, les moments *maxima* ont la même valeur, et ils varient d'un hyperboloïde à l'autre, suivant les lois que nous avons données ci-dessus.

Actuellement, tout ce que nous venons de dire relativement aux diverses origines prises dans un même plan perpendiculaire à la résultante subsiste de la

même manière, et avec les mêmes valeurs, pour tous les lieux qu'occuperaient successivement tous ces points en transportant le plan parallèlement à lui-même. Les moments *maxima* restent les mêmes autour des mêmes axes qui deviennent parallèles; et comme il n'y a, parmi eux, que l'axe du moment *minimum maximorum* qui soit perpendiculaire au plan mobile, on voit qu'il est le seul qui n'ait absolument qu'une même position dans l'espace; que, de plus, tous les axes qui ont à son égard des positions semblables donnent les mêmes moments; et c'est ce qui nous a fait nommer cet axe unique, l'*axe central* des moments..

Au reste, les résultats précédents, tirés des raisonnements les plus simples, pourraient aussi se déduire du calcul par la méthode ordinaire *de maximis et minimis;* et l'on trouve aisément, pour l'axe du moment *minimum maximorum*, les équations suivantes :

$$(N + Yx - Xy)\,Y - (M + Xz - Zx)\,Z = 0,$$
$$(L + Zy - Yz)\,Z - (N + Yx - Xy)\,X = 0,$$
$$(M + Xz - Zx)\,X - (L + Zy - Yz)\,Y = 0,$$

où $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées de cette droite par rapport à trois axes autour desquels les sommes respectives des moments sont L, M, N, tandis que X, Y, Z sont les sommes des forces décomposées parallèlement aux mêmes axes.

L'une quelconque de ces équations est une suite nécessaire des deux autres, et, par conséquent, elles ne représentent qu'une seule et même ligne droite, laquelle est manifestement parallèle à la direction de la résultante générale des forces.

On trouve encore, pour le lieu de tous les points

relativement auxquels les moments *maxima* sont égaux et représentés par H, l'équation suivante :

$$(L - Yz + Zy)^2 + (M - Zx + Xz)^2 + (N - Xy + Yy)^2 = H^2,$$

qui appartient à une surface cylindrique à base circulaire décrite autour de la première droite, ce qui est conforme à ce que nous avons vu précédemment.

Mais nous ne nous arrêterons pas à ces détails, et nous passerons sur-le-champ aux applications de la théorie des moments à la Dynamique.

## III.

### *Application de la théorie précédente à la Dynamique.*

Soient tant de corps libres qu'on voudra qui se meuvent, sans aucune dépendance mutuelle, avec des vitesses uniformes suivant des droites quelconques, dans l'espace.

Puisque chaque corps se meut uniformément en ligne droite, la force qui l'anime demeure constante et de même direction.

Donc la résultante générale de toutes les forces qui animent les corps du système, et leur moment résultant par rapport à un point fixe quelconque, demeurent constamment les mêmes dans tout le cours du mouvement.

### *Conservation des forces et conservation des moments.*

Actuellement, si l'on suppose que tous ces corps, qui étaient libres, viennent tout à coup à se lier ensemble d'une manière quelconque, et à réagir encore les uns

sur les autres en vertu de nouvelles forces quelconques, mais réciproques, c'est-à-dire telles qu'entre deux corps l'action soit toujours parfaitement égale et contraire à la réaction, ce qui comprend toutes les forces de la nature; les mouvements individuels des différents corps seront changés, et les forces qui les animent varieront de grandeurs et de directions, et continueront de varier à chaque instant du mouvement. Mais ce qui est bien remarquable, et forme un des plus beaux principes de la Dynamique, c'est que la résultante générale de toutes ces forces, et leur moment résultant par rapport au point fixe, demeureront toujours les mêmes qu'auparavant, et seraient encore conservés si tous les corps redevenaient libres, et que chacun d'eux s'échappât en ligne droite avec la nouvelle vitesse dont il est actuellement animé.

*Démonstration très-simple de ces deux lois générales.*

Ce principe, qui se déduit des équations différentielles du mouvement, peut aussi se démontrer par un raisonnement si simple, que je ne crois pas devoir l'omettre ici.

Il est clair, en effet, que si chaque corps, à cause de sa liaison avec les autres, ne peut plus obéir pleinement à l'impulsion qu'il a reçue, sa force se décompose en deux autres, l'une qui est détruite, et l'autre qui subsiste actuellement. Tout se passe comme à la rencontre d'un obstacle invincible, excepté que la composante, qui serait anéantie par l'obstacle, va se reporter sur les autres corps qui la détruisent par leur action. La force de chaque corps étant ainsi remplacée par deux semblables composantes, la résultante de

toutes ces nouvelles forces et leur moment résultant sont toujours les mêmes qu'avant cette substitution. Mais les composantes, qui se font équilibre entre elles, donnent leur résultante et leur moment résultant nuls, comme nous l'avons vu dans les lois générales de l'équilibre : donc la première résultante et le premier moment résultant sont conservés, et n'ont souffert aucune altération par l'action mutuelle des différents corps du système. Quant aux autres forces qui pourraient exister entre ces corps, comme elles sont réciproques, c'est-à-dire deux à deux égales et contraires, elles ne changent rien non plus aux valeurs précédentes, car leur résultante et leur moment résultant sont évidemment nuls d'eux-mêmes.

*On voit donc que, dans un système de corps qui ont reçu des impulsions primitives, et qui réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres, la somme de toutes les forces qui les animent, estimées suivant une même droite, et la somme de leurs moments estimés autour d'un même axe fixe quelconque, demeurent constamment les mêmes, malgré les variations qu'éprouvent les mouvements individuels des corps, et soit que ces mouvements changent par des nuances insensibles, soit qu'il survienne entre eux des changements brusques par l'action réciproque des corps, ou par toute autre liaison nouvelle qu'on voudrait établir subitement entre ces corps.*

Ces deux propriétés générales du mouvement correspondent, en quelque sorte, aux deux propriétés générales de l'équilibre; les mêmes sommes qui doivent être nulles dans l'état d'équilibre demeurent constantes dans l'état de mouvement, et la conservation des forces et des mo-

ments, présentée de cette manière, subsiste également pour toutes les lois possibles entre la force et la vitesse du corps en mouvement.

*A quoi répondent les lois précédentes dans la nature. — Conservation du mouvement du centre de gravité; conservation des aires.*

Dans la nature, la force d'un corps en mouvement se mesure par le produit de la masse et de la vitesse; et le premier principe répond à la conservation du mouvement du centre de gravité, qui consiste en ce que ce centre se meut toujours uniformément en ligne droite, et de la même manière que si tous les corps du système y étaient réunis et que les forces qui les animent s'y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes.

En effet, puisque la somme des forces estimées suivant une même droite est constante, on peut dire que la somme des vitesses de toutes les molécules égales du système, et, par conséquent, leur moyenne vitesse pour s'éloigner d'un plan perpendiculaire à cette droite, est aussi une quantité constante. Or, à chaque instant, les vitesses des molécules sont mesurées par les petits accroissements, positifs ou négatifs, de leurs distances au plan que je considère : ainsi, la moyenne vitesse n'est autre chose que le moyen accroissement ou l'accroissement de la moyenne de toutes ces distances, et, par conséquent, c'est la vitesse même du point qui est le centre de gravité de tout le système. Donc la vitesse de ce point, estimée suivant une droite quelconque dans l'espace, est toujours la même; et, comme elle repré-

sente la moyenne vitesse de toutes les molécules, elle s'exprime par la somme de toutes les vitesses, divisée par leur nombre, ou par la somme de toutes les forces divisée par la masse entière du système.

Si l'on prend, pour cette droite à laquelle on rapporte les forces, la direction même de la résultante générale, on voit que le centre de gravité se meut précisément dans cette direction; car si l'on cherchait actuellement la vitesse de ce centre, pour s'éloigner d'un plan quelconque mené suivant cette droite, on trouverait cette vitesse nulle, puisque la somme des forces, estimées dans un sens quelconque perpendiculaire à la résultante générale, est toujours nulle.

Ainsi, *le centre de gravité du système se meut uniformément, en ligne droite, dans la direction même de la résultante générale, et sa vitesse est exprimée par cette résultante divisée par la masse entière du système.*

Si cette résultante générale est nulle, et qu'ainsi toutes les forces appliquées soient réductibles à un couple, le centre de gravité du système reste donc en repos dans l'espace, quels que soient les mouvements particuliers des différents corps qui le composent.

Si tous ces corps sont liés entre eux de manière à former un système invariable de figure, le système ne peut donc avoir qu'un mouvement de rotation autour du centre de gravité; d'où l'on voit que l'effet d'un couple sur un corps ou système solide est de le faire tourner autour d'un point déterminé, qui ne dépend ni de la grandeur ni de la direction du couple appliqué, mais uniquement de la figure du corps, ou plutôt de la disposition mutuelle des différentes particules qui le composent. Ainsi, le centre de gravité des corps se

présente d'une manière aussi naturelle dans la théorie du mouvement que dans celle de l'équilibre : et il ne faut pas, avec quelques géomètres, le regarder seulement comme un point qu'il est préférable de choisir, parce que certaines expressions analytiques qu'on y rapporte se simplifient, ou que certaines intégrales s'y évanouissent, mais bien comme un point dont la considération s'offre d'elle-même dans la nature, et vient, pour nous, de cette loi qui fait simplement la force proportionnelle à la vitesse. On doit dire la même chose de ces trois *axes principaux* de rotation, autour desquels un corps peut tourner librement, parce que les forces centrifuges s'y contre-balancent. C'est en vertu de cette même loi dont je viens de parler, qu'il y a de tels axes dans tous les corps, qu'il y en a trois, qu'ils passent au centre de gravité et qu'ils sont rectangulaires entre eux.

Mais je passe au second principe de la conservation des moments. Si l'on prend un point fixe quelconque, et que, de ce point fixe ou *foyer*, on mène à tous les corps du système des rayons vecteurs, en projetant toutes ces droites sur un plan quelconque, on verra facilement que le moment de chaque force, par rapport à un axe perpendiculaire au plan de projection, et passant par le foyer, est proportionnel au produit de la masse du corps par l'aire que trace sur ce plan la projection de son rayon vecteur.

Ainsi, *dans la loi de la nature, la conservation des moments revient à la conservation des aires, qui consiste en ce que la somme des produits des corps par les aires respectives que tracent les projections de leurs rayons vecteurs sur un plan fixe quelconque mené par le foyer,*

*est proportionnelle au temps, c'est-à-dire est toujours la même, en temps égal, pendant tout le mouvement du système.*

Si toutes les masses du système étaient égales entre elles, on n'aurait pas besoin de considérer leurs produits respectifs par les aires précédentes, mais simplement ces aires elles-mêmes; et le théorème reviendrait à ce que la somme des aires décrites par les rayons vecteurs autour du foyer est toujours égale en temps donné. C'est ainsi qu'on peut toujours énoncer le principe des aires, mais en supposant que les masses du système soient divisées en parties égales, et qu'on ait tiré du foyer des rayons vecteurs à toutes ces parties.

### *Plan du* maximum *des aires.*

Cela posé, puisque les aires tracées par les rayons vecteurs ne sont autre chose que les moments des forces, il s'ensuit qu'on peut appliquer à la composition des aires, tout ce que nous avons dit de la composition des moments.

Et d'abord, on voit que, parmi tous les plans menés par le même foyer, et qui reçoivent de la part des rayons vecteurs des aires différentes, il y en a un seul qui reçoit la plus grande; et si l'on nomme L, M, N les sommes respectives des aires tracées sur trois plans rectangulaires quelconques, menés par le foyer, on aura pour la valeur G de l'aire, qui est un *maximum*,

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Et, à l'égard du plan qui la reçoit, si l'on nomme $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les trois angles respectifs qu'il forme avec les trois pre-

miers, on aura, pour les cosinus de ces angles,

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \quad \cos\mu = \frac{M}{G}, \quad \cos\nu = \frac{N}{G},$$

ce qui détermine sur-le-champ la position de ce plan remarquable.

Lorsque l'on connaît l'aire *maximum* G, et le plan sur lequel elle tombe, on trouve facilement les aires que reçoivent les divers plans menés par le foyer. Car, $\theta$ étant l'angle que forme un plan quelconque avec celui du *maximum* des aires, on a pour l'aire décrite sur ce nouveau plan, $G\cos\theta$. D'où l'on voit que les aires sont égales sur tous les plans qui font le même angle avec celui du *maximum*, ou qui touchent un cône décrit sous le complément de cet angle autour de l'axe perpendiculaire à ce dernier plan; que, de plus, elles sont nulles quand l'angle $\theta$ est droit, c'est-à-dire sur tous les plans perpendiculaires à celui du *maximum*.

### *Plan du* minimum *des aires* maxima.

Actuellement, parmi tous les plans qui donnent les aires *maxima*, relativement aux divers points de l'espace considérés comme foyers, il y en a un seul qui donne le *minimum* de ces *maxima*, ou l'aire *minimum maximorum*.

Ce plan est perpendiculaire à la direction de la résultante générale, ou du mouvement commun qui emporte le système. Son axe, c'est-à-dire la perpendiculaire qui y serait élevée au foyer, se trouvera absolument de la même manière que l'axe central des moments, et le foyer pourra être pris partout où l'on

voudra sur cette droite. Pour tous les foyers qui en seraient aux mêmes distances dans un plan perpendiculaire, les aires *maxima* auront les mêmes valeurs, et leurs plans seront perpendiculaires aux diverses génératrices d'un hyperboloïde de révolution décrit autour de cet axe central. D'ailleurs, ces aires *maxima* et les inclinaisons de leurs plans varieront, en vertu des distances précédentes, d'après les mêmes lois que nous avons données plus haut ; et l'on trouvera sur les aires tous les théorèmes analogues à ceux qui ont été rapportés sur les moments.

*Usage de ces plans; de ceux qu'il faut choisir pour y rapporter les corps du système.*

Cette constance des aires décrites sur des plans qui restent immobiles au foyer nous donne d'abord l'idée de les observer sur les plans auxquels nous rapportons les différents corps, afin qu'à toutes les époques du mouvement nous puissions retrouver la position de ces plans, et reconnaître les changements survenus dans le système. Mais, d'après ce que nous venons de dire, on voit qu'il y a un choix à faire entre ces plans coordonnés. Car si un plan qui reste immobile au foyer reçoit constamment la même aire de la part des rayons vecteurs, un plan qui recevrait constamment une même aire donnée ne serait pas pour cela immobile; il pourrait se mouvoir d'une manière quelconque tangentiellement à un certain cône décrit autour du foyer. Donc, si l'on avait rapporté primitivement tous les corps du système à un certain plan, et qu'on ne sût rien autre chose de ce plan, sinon qu'il recevait une aire

donnée, on ne pourrait plus reconnaître actuellement sa position dans l'espace, parce qu'il a pu changer, ou, plus exactement, parce qu'il y en a une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété que lui.

Mais si l'on savait que le plan cherché était, entre tous ceux qui passent au même foyer, celui qui recevait l'aire la plus grande, on le retrouverait sur-le-champ, parce qu'il est unique, et jouit d'une propriété exclusive par rapport à tous les autres.

C'est donc ce plan qu'il faut choisir, de préférence *à tous ceux qui passent en un même point*, pour y rapporter les différents corps du système; et, sans connaître la grandeur de l'aire qui y est décrite, on pourra retrouver sa position dans tous les temps, pourvu qu'on connaisse le point fixe d'où partaient les rayons vecteurs, ou du moins quelque autre point fixe qui soit, avec le premier, dans la direction du mouvement général; car nous avons vu que, pour ce nouveau foyer, le plan de l'aire *maximum* serait parallèle au premier.

Si l'on ne connaissait point la position de ce foyer, quand bien même on saurait que l'aire *maximum* décrite sur le plan cherché avait une valeur donnée, on ne pourrait pas encore distinguer ce plan d'une infinité d'autres perpendiculaires aux génératrices d'un certain hyperboloïde de révolution, parce que chacun de ces plans jouirait de la même propriété de recevoir une aire *égale*, et *maximum* entre celle des plans qui se croiseraient avec lui au même point.

Mais si l'on ajoutait que l'aire *maximum* dont il s'agit était le *minimum* des aires *maxima* relatives aux

divers foyers de l'espace, on retrouverait sur-le-champ la position du plan cherché, parce qu'il jouit non-seulement d'une propriété exclusive par rapport à ceux qui passeraient au même foyer, mais encore d'une autre propriété exclusive par rapport à tous ceux qui auraient la première commune avec lui.

C'est donc ce nouveau plan qu'il faut choisir de préférence à tous ceux de l'espace; et l'on en pourra retrouver la position à toutes les époques, sans connaître ni la grandeur de l'aire qui y est décrite, ni le point qu'on a pris pour centre des rayons vecteurs. Mais, pour le déterminer, il faudra toujours avoir quelque point fixe d'où l'on puisse partir actuellement, et connaître en outre la grandeur et la direction de la résultante générale qui emporte le système dans l'espace.

*Dans le cas des aires relatives, que l'aire* minimum maximorum *est la même que l'aire* maximum *autour d'un foyer quelconque.*

Lorsqu'on ne connaît aucun point fixe auquel on puisse rapporter les rayons vecteurs, et qu'on partage les mouvements des corps eux-mêmes que l'on considère, on ne peut plus observer que des aires décrites autour de foyers mobiles dans la direction du mouvement général. Or ces aires sont alors les mêmes que si le mouvement général était nul, ou que le centre de gravité du système fût en repos.

On a pu voir, en effet, par l'équation $G^2 = K^2 + R^2 p^2$, qu'un moment *maximum* G, relatif à une certaine origine, se compose du moment *minimum maximorum* K, et du moment $Rp$ de la résultante générale par la distance de l'axe central à cette origine. De même l'aire *maximum*,

par rapport à un foyer fixe, est la résultante de l'aire *minimum maximorum* et de l'aire qui est décrite par le rayon vecteur de la masse entière du système, considérée comme réunie dans l'axe central, et animée, suivant cet axe, de la vitesse commune. Si donc le foyer que l'on considère, au lieu d'être fixe dans l'espace, se meut avec la vitesse commune parallèlement à l'axe central, cette partie des aires qui sont décrites en vertu du mouvement général disparaît d'elle-même; et les aires observées sont parfaitement les mêmes que si la résultante générale était nulle, ou que le centre de gravité du système fût en repos dans l'espace.

Mais, quand la résultante générale est nulle, les aires *maxima* sont égales pour tous les foyers de l'espace, et leurs plans sont tous parallèles; donc alors le foyer de l'aire *minimum maximorum* peut être pris partout où l'on voudra.

### *Application au système du monde.*

Ainsi, dans le système du monde, comme on ne connaît aucun point fixe auquel on puisse rapporter les différents corps célestes, et qu'on ignore d'ailleurs dans quel sens et avec quelle force ce système est entraîné dans l'espace, on ne peut déterminer ni le plan ni la valeur de l'aire *minimum maximorum*, et l'on peut choisir simplement le plan du *maximum* des aires, relativement à un point quelconque qui se meuve en ligne droite avec la vitesse commune du système. On peut donc prendre le foyer au centre de gravité, qui jouit de cette propriété dans tout le cours du mouvement; et c'est ce qu'a fait l'auteur de la *Mécanique céleste*, qui, le premier, a

considéré ce plan dans notre système planétaire, et qui lui a donné le nom de *plan invariable*.

Au reste, on peut encore prendre le foyer au centre de l'un quelconque des corps considéré comme fixe à chaque instant, c'est-à-dire comme actuellement privé de sa vitesse relative : ce point, n'ayant plus alors que la vitesse commune, sera dans le même cas que le centre de gravité. Ainsi, le plan de l'aire *maximum* relative à ce point sera parallèle au premier, et recevra la même aire.

Si donc, pour considérer également tous les corps du système, on prend successivement les aires élémentaires décrites autour de chaque corps par tous les autres, en multipliant ces diverses sommes par les masses respectives des corps qui ont servi successivement de foyers, on trouvera, en les ajoutant, tous les produits des masses prises deux à deux, multipliés par les aires qu'elles tracent dans le même temps, l'une autour de l'autre considérée comme immobile.

Le plan dont nous avons parlé jouit donc encore de cette propriété remarquable, que la somme des produits précédents y est un *maximum*, aussi bien que sur tous ceux qui lui sont parallèles; et l'on voit que cette somme n'est autre chose que l'aire *maximum* relative au centre de gravité, multipliée par la masse entière du système. C'est ainsi que Laplace présente encore la théorie de ce plan *invariable*, en ramenant le principe des aires à des relations entre les distances mutuelles des différents corps du système.

Ce plan forme en quelque sorte l'immuable *équateur* du système du monde. Quels que soient les changements que la suite des siècles amène entre les corps

célestes, il demeurera toujours parallèle à lui-même; et, puisqu'on en peut retrouver la position dans tous les temps, comme on retrouve celle du centre de gravité, on aura toujours, en y rapportant tous les corps du système, le moyen de comparer d'une manière précise les observations de l'Astronomie faites aux époques les plus éloignées.

Nous rappellerons encore ce corollaire remarquable de la théorie précédente, que, dans un système de molécules solides et fluides, animées primitivement par des forces quelconques et soumises à leur action mutuelle, s'il arrive qu'après un grand nombre d'oscillations ces molécules se fixent à un état permanent de rotation autour d'un axe invariable passant par leur commun centre de gravité (et l'on conjecture avec assez de vraisemblance que c'est le cas des corps célestes), alors leur équateur, ou le plan perpendiculaire à cet axe, sera parallèle à celui qui recevait, à l'origine du temps, le *maximum* des aires relativement au centre de gravité.

Mais nous n'étendrons pas plus loin ces dernières considérations, qui ont été assez approfondies par le géomètre que nous avons cité. Notre objet principal était de fonder une nouvelle théorie des moments et des aires, d'étendre et de simplifier à la fois toute cette partie de la Mécanique, et de faire passer ainsi dans les Éléments les plus beaux théorèmes qu'on y eût trouvés jusqu'ici.

*Remarque nouvelle sur les aires.*

Nous finirons par faire observer, sur la loi des aires, que les plans ne sont pas les seules surfaces sur lesquelles elles se conservent sans altération pendant le mouve-

ment du système. La même propriété appartient aussi à toute surface conique circulaire dont le sommet est placé au foyer des rayons vecteurs; mais il faut projeter ces rayons sur le cône par des lignes parallèles à son axe.

Les aires décrites sur les surfaces de différents cônes de même axe et de même sommet seront réciproquement proportionnelles aux sinus des angles sous lesquels ces cônes sont décrits; d'où l'on voit que le cône qui recevra l'aire la plus petite sera le cône décrit sous l'angle droit autour de l'axe commun, c'est-à-dire le plan perpendiculaire à cet axe.

Entre tous les cônes semblables de même sommet, mais d'axes différents, il y en aura un seul sur la surface duquel l'aire tracée par les rayons vecteurs sera un *maximum*.

Parmi tous ceux qui donneraient de même les aires *maxima* relativement aux divers foyers de l'espace, il y en aura un seul qui donnera le *minimum* de ces aires *maxima*.

Pour les axes de ces cônes remarquables, ils ne sont autre chose que les axes des moments ou des aires qui jouissent des propriétés analogues, et ils se détermineront absolument de la même manière. Enfin l'on trouvera, en considérant les aires tracées sur des cônes quelconques semblables, tous les théorèmes que nous avons donnés par rapport aux aires qui sont tracées sur de simples plans.

# THÉORIE ET DÉTERMINATION

DE

## L'ÉQUATEUR DU SYSTÈME SOLAIRE.

Je vais développer dans ce Mémoire les recherches nouvelles que j'ai présentées à l'Académie le 24 mars 1828, et qui ont pour objet l'une des questions les plus élevées du système du monde. Il s'agit de la détermination exacte du seul plan des aires qui soit vraiment invariable dans notre système planétaire, et qui en forme en quelque sorte l'immuable *équateur;* car le plan que Laplace a nommé *invariable*, et déterminé comme tel dans sa *Mécanique céleste*, n'est point le véritable; et nous allons voir qu'à cet égard, l'analyse de l'auteur avait besoin d'être rectifiée. Mais, auparavant, je crois devoir rappeler les premières idées qui ont donné naissance à la théorie des aires, afin de jeter un nouveau jour sur l'origine et la suite naturelle de ces considérations.

### THÉORIE.

### I.

On a vu que, dans le mouvement de plusieurs corps qui réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres, mais dont le système est supposé parfaitement libre de toute action étrangère, si l'on projette

sur un plan les aires que tracent, autour d'un point fixe ou *foyer*, les rayons vecteurs menés de ce foyer à toutes les molécules égales du système, la somme de ces aires projetées demeure constante, c'est-à-dire est toujours la même en temps égal, malgré les variations qu'éprouve chacune d'elles par l'action réciproque des différents corps; et c'est dans cette propriété générale du mouvement des systèmes que consiste le principe si connu de la *Conservation des aires*.

## II.

Les géomètres ne se sont pas élevés tout d'un coup à cette loi générale de la Dynamique. L'origine de ces idées remonte à Képler, qui le premier imagina de considérer l'aire du secteur que décrit le rayon vecteur d'une planète dans son mouvement autour du soleil. Et si l'on cherche ce qui a pu lui donner cette idée, on trouvera, ce me semble, qu'il y parvint, non point par hasard comme on pourrait le croire d'abord, mais par une certaine marche naturelle, que je veux indiquer en passant, parce qu'elle se retrouve dans toutes nos recherches, et qu'elle résulte, pour ainsi dire, de la nature même de l'esprit humain.

Et, en effet, nous ne connaissons en toute lumière qu'une seule loi : c'est celle de la constance et de l'uniformité. C'est à cette idée simple que nous cherchons à réduire toutes les autres, et c'est uniquement dans cette réduction que consiste pour nous la *science*. Ainsi, quand nous étudions les choses qui changent pour découvrir ce qu'on appelle la loi de leurs variations, notre unique objet est de trouver ce qu'il peut y avoir d'uniforme et de

constant au milieu de ces choses qui varient. Que si, avec le temps et par un nouvel examen, nous venons à reconnaître que des rapports qui nous avaient paru constants sont eux-mêmes variables, il nous faut faire un nouveau pas. Mais notre marche est toujours la même; car alors ce n'est plus dans ces rapports, mais dans quelque autre formé de leur combinaison, que notre esprit va rechercher cette loi de constance qui avait, pour ainsi dire, échappé à ses premières conclusions. Tel est, je crois, le mouvement naturel de l'esprit humain, mouvement qu'on pourrait même remarquer dans la Géométrie et dans l'Analyse, mais dont l'Astronomie nous offre ici l'image la plus sensible.

Ainsi, les anciens astronomes, d'après les premières apparences des mouvements célestes, avaient cru naturellement que les planètes décrivaient dans leur cours des cercles parfaits, et qu'elles les décrivaient d'un mouvement uniforme : de sorte que la ligne menée du centre à la planète et sa vitesse angulaire étaient regardées comme constantes. Malgré quelques inégalités que l'observation avait rendues sensibles, cette première loi du mouvement des planètes subsista très-longtemps, parce qu'on faisait disparaître à très-peu près ces inégalités en essayant de mieux placer le centre de ce cercle parfait qu'on avait imaginé. Mais Képler ayant reconnu par la comparaison attentive de nombreuses observations, que le mouvement d'une planète se fait, non dans un cercle, mais dans une ellipse dont le soleil occupe un des foyers, de sorte que le rayon vecteur et l'angle qu'il décrit étaient tous deux variables; et ne trouvant plus ainsi, ni dans ce rayon, ni dans cet angle, cette constance qu'on y avait d'abord supposée, imagina

de la retrouver dans une quantité nouvelle composée de ces deux-là; et considérant dans cette vue la plus simple qu'on en puisse former, savoir, l'aire du secteur elliptique que trace le rayon vecteur de la planète autour du soleil, il trouva enfin que cette aire était constante, c'est-à-dire toujours la même en temps égal, ou, en d'autres termes encore, que l'aire décrite était proportionnelle au temps écoulé.

Cette loi de Képler, qui n'était prouvée que par l'observation, Newton la démontra ensuite comme un théorème mathématique qui doit avoir lieu dans le mouvement de tout corps attiré par une force quelconque vers un centre fixe; et, réciproquement, il fit voir que si cette description uniforme des aires est observée dans le mouvement d'un corps, elle est une preuve de l'attraction ou de la tendance de ce corps au centre des rayons vecteurs; ce qui conduit naturellement au principe de la pesanteur universelle.

Enfin, vers le milieu du siècle dernier, le chevalier d'Arcy, Daniel Bernoulli et Euler découvrirent presque en même temps, et sous des formes différentes, un théorème plus général, mais qui n'est en quelque sorte que celui de Newton étendu à plusieurs corps qui seraient soumis à la fois à leurs actions réciproques et à des forces quelconques dirigées vers un même point fixe. Dans le mouvement du système autour de ce point comme foyer, l'aire que décrit chaque corps en particulier n'est plus constante, elle varie à chaque instant de grandeur et de position par l'action perturbatrice des autres corps. Mais en projetant toutes ces aires variables sur un même plan fixe, et les multipliant par les masses respectives des corps, on trouve que la somme de ces projections est constante, et se

conserve sans altération, comme dans le cas d'un seul mobile.

On voit comment les géomètres, qui démontrent et qui généralisent, ont su s'élever rapidement au principe général des aires dans un système quelconque, et, par conséquent, dans le système du monde : mais observez, en passant, que si ce principe n'eût pas été ainsi démontré et découvert à l'avance, le temps seul, et par cette même marche de l'esprit que j'ai indiquée plus haut, aurait encore pu nous y conduire. Car, à la longue, et par des observations plus précises, on aurait reconnu que l'aire décrite par chaque planète n'est pas rigoureusement uniforme ; et considérant alors les différentes aires relatives aux différentes planètes, pour en faire, ce qui était naturel, la combinaison la plus simple, comme celle de la somme de leurs projections sur un seul et même plan, on aurait retrouvé dans l'ensemble de ces aires projetées cette constance rigoureuse qui n'était plus dans chacune d'elles.

## III.

Quoi qu'il en soit, le principe a lieu, comme on l'a dit, dans le mouvement d'un système de corps qui réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres; mais, pour la rigueur du théorème, il faut l'énoncer comme je l'ai fait au commencement, c'est-à-dire en considérant, non pas le produit de chaque masse par l'aire que décrit le rayon vecteur mené au centre de ce corps, mais la somme des aires décrites par les rayons menés à toutes les molécules égales du système ; ce qui donne la vraie quantité, qui est rigoureusement constante dans tout le cours du mouvement.

Si les corps ne sont point attirés vers un point extérieur, et n'éprouvent que leur action ou attraction mutuelle, le foyer des rayons vecteurs peut être pris partout où l'on voudra dans l'espace. Si, comme dans le système du monde, on fait abstraction du mouvement général qui emporte le système, pour ne considérer que les mouvements relatifs des corps, on doit placer naturellement le foyer dans leur commun centre de gravité, parce que ce point déterminé est en repos, et comme fixe, dans l'espace relatif où s'exécutent les mouvements observés des différents corps.

IV.

Maintenant, si l'on considère les divers plans de projection qu'on pourrait mener par le même foyer, et sur lesquels la somme des aires projetées aurait en général des valeurs différentes, il est aisé de voir que, parmi ces plans, il y en a une infinité où cette somme est nulle; que tous ces plans de projection nulle se coupent suivant une seule et même droite déterminée; que tous les plans possibles qui passent par cette droite jouissent de la même propriété, et sont les seuls qui en jouissent. Le plan perpendiculaire à cette droite est donc un plan distingué de tous les plans de l'espace par cette propriété, que la somme des aires se trouve nulle sur tous les plans qui lui sont perpendiculaires. Quant aux plans qui lui sont également inclinés, la somme des aires y a une même valeur, et cette valeur est proportionnelle au cosinus de l'inclinaison : d'où il résulte que, sur le plan unique et distinct dont il s'agit, cette somme est la plus grande possible, ou ce qu'on appelle un *maximum*. Or c'est ce plan du *maximum* des aires que Laplace a nommé *le plan invariable*.

V.

La considération de ce plan remarquable s'était déjà présentée aux géomètres dans la recherche analytique du mouvement de quelques systèmes; et elle avait même été employée dans le problème de la rotation d'un corps solide qui tourne librement autour de son centre de gravité. En cherchant à simplifier le calcul, on était arrivé naturellement à ce plan de projection, comme à l'un des trois plans coordonnés qu'on devait choisir de préférence, afin de rendre nulle la somme des aires sur les deux autres, et de faire ainsi disparaître deux intégrales ou constantes arbitraires. Or il faut faire ici une remarque essentielle : c'est que ce seul cas particulier de la détermination du plan invariable dans le mouvement d'un corps ou système solide en contient au fond toute la théorie; car, comme l'expression des aires décrites par les différents points d'un système ne dépend ni de la liaison, ni de l'attraction mutuelle de ces points, il est évident que le même calcul, ou la même transformation de coordonnées, qui détermine ce plan dans un système de points invariablement liés entre eux, le donne également dans un système de points liés entre eux d'une manière quelconque. Ainsi, l'on voit que la théorie du plan invariable se trouvait connue, parce que, cette théorie étant indépendante de la nature du système, un seul exemple qu'on en donne suffit pour la démontrer tout entière. Mais il est juste de dire que Laplace est le premier qui ait considéré et déterminé ce plan dans notre système planétaire, et qui lui ait donné un nom.

## VI.

Ce grand géomètre a donc cherché la position que ce plan devait avoir, par rapport à l'écliptique, au commencement de l'année 1750, et même celle qu'il aura en 1950, d'après les variations calculées qu'auront subies à cette époque les excentricités, les inclinaisons et les nœuds des différentes orbites des corps célestes. Et, par les formules qu'il a données à ce sujet, ou la règle qu'il énonce au chapitre II du livre IV de son *Exposition du Système du Monde*, il a trouvé que l'inclinaison du plan à l'écliptique était de 1°,7689 au commencement de 1750; et la longitude de son nœud ascendant, de 114°,3979 : valeurs qu'il trouve devoir être à très-peu près les mêmes en 1950, la longitude du nœud ayant seule varié de 45″. C'est ce qu'on peut voir dans le chapitre XVII du livre VI de la *Mécanique céleste*.

Mais, ayant eu l'occasion d'examiner cette analyse, j'ai remarqué qu'elle ne pouvait être exacte que dans l'hypothèse où les planètes seraient regardées comme autant de points massifs, dont chacun serait chargé de la masse entière de la planète et de ses satellites; et qu'ainsi, pour déterminer le plan invariable du *maximum* des aires, Laplace n'avait considéré que les aires dues aux seuls mouvements de révolution des planètes autour du Soleil.

## VII.

Or, en appliquant nos principes à cette détermination, j'ai reconnu que la position du plan invariable dans le système du monde ne dépendait pas seule-

ment des aires que décrivent les planètes en vertu de leurs révolutions autour du Soleil, mais qu'elle dépendait encore d'autres aires, auxquelles on n'avait point songé, savoir, de celles qui sont dues aux révolutions particulières des satellites autour de leurs planètes principales, et de celles qui naissent de la rotation de ces planètes et du Soleil lui-même sur leurs propres axes Il résulte, en effet, de notre théorie des couples, que le plan dont il s'agit n'est au fond que celui de l'aire qui proviendrait de la combinaison de toutes ces aires simultanées, si on les composait entre elles à la manière des simples forces appliquées sur un point; que le plan de cette aire résultante est le seul dont on puisse affirmer qu'il demeure immobile dans le ciel, ou qu'il reste toujours parallèle à lui-même, quels que soient les changements que la suite des siècles puisse amener dans les mouvements, dans la figure et la position mutuelle des différents corps célestes. Que si l'on ne composait entre elles qu'une partie de ces aires simultanées, on ne pourrait plus dire que l'aire partielle qui en résulte est invariable de grandeur et de position dans l'espace: d'où il faut conclure que le plan invariable déterminé par Laplace peut changer, et qu'ainsi il n'est pas propre à faire reconnaître, dans la suite des temps, les changements réels qui peuvent survenir dans la position des orbes et des équateurs planétaires.

## VIII.

Pour remplir ce grand objet, et donner aux astronomes futurs le moyen de comparer avec précision les observations séparées par de longs intervalles de

temps, il faut donc recourir à ce nouveau plan que je propose, et qui forme en quelque sorte l'immuable *équateur* du système du monde. Or voici, d'après notre théorie des couples, l'expression la plus simple de la règle qui le détermine :

« Considérez d'abord, pour chacun des corps célestes, l'aire résultante de celles que décrivent toutes » ses particules autour de son propre centre de gravité, » aire qui tombe sur le plan de l'équateur du corps, » et qui a pour mesure le produit de son moment » d'inertie par sa vitesse angulaire de rotation ; et » regardez maintenant les centres de ces corps comme » autant de points où leurs masses respectives seraient » concentrées.

» Considérez ensuite, pour chaque groupe formé d'une » planète et de ses satellites, l'aire que chacun des corps » y décrit dans son orbite autour du centre de gravité » de ce groupe, laquelle se trouvera en multipliant la » masse du corps par le carré du rayon vecteur et la » vitesse angulaire de révolution; et réduisez mainte- » nant ce groupe à son centre de gravité comme à un » seul point où toute la masse serait concentrée.

» Considérez enfin les aires que les centres de ces » groupes et ceux des corps qui n'ont point de satellites » décrivent dans leurs orbites autour du commun centre » de gravité de tout le système, et dont chacune se mesu- » rera de même en multipliant la masse par le carré du » rayon vecteur et la vitesse angulaire de révolution.

» Si, par ce même centre de tout le système, vous » menez des lignes perpendiculaires aux plans respectifs » de toutes les aires que je viens de considérer, et pro- » portionnelles à leurs grandeurs, et que vous composiez

» entre elles toutes ces lignes à la manière des forces, la » ligne résultante sera perpendiculaire au plan de l'équa- » teur cherché, et sa longueur représentera la quantité de » l'aire totale qui s'y décrit.

» Sur quoi il faut observer que les lignes composantes » dont il s'agit doivent être tirées d'un même côté de » l'écliptique, parce que, dans notre système, les diffé- » rentes aires que ces lignes représentent, étant vues de » ce même côté, se décrivent toutes dans le même sens. » Ainsi, en supposant toutes ces lignes menées du » côté boréal de l'écliptique, la ligne résultante prolon- » gée de ce côté ira marquer dans le ciel le pôle boréal de » l'équateur du système du monde. »

Par cette règle générale (ou les formules qu'on en peut facilement déduire), si l'on suppose connus les masses et les moments d'inertie des corps célestes, il est évident qu'à une époque quelconque, et par les distances et les mouvements mêmes des corps célestes observés à cette époque, on pourra déterminer la position de cet équateur par rapport au plan mobile de quelque orbite planétaire, tel, par exemple, que le plan de notre écliptique. Si donc on imagine que la recherche en soit faite à des époques différentes, et qu'on le trouve situé dans des positions différentes, comme on est sûr que ce plan n'aura pas changé, on conclura le changement réel survenu dans la position de l'écliptique et des différentes orbites qu'on y aurait rapportées. C'est ainsi que les observations des mouvements célestes peuvent être ramenées à des termes fixes, et dégagées de l'incertitude et de l'erreur que les variations de l'écliptique et le mouvement propre des étoiles auraient pu à la longue y introduire.

## IX.

Quant à ces aires nouvelles qui doivent entrer dans la détermination de notre plan invariable, on pourrait dire que celles qui viennent des mouvements particuliers des satellites, et même de la rotation de quelques planètes, sont des quantités assez petites, et que le plan invariable, déterminé en ne négligeant que ces petites quantités, différerait peu du véritable. Mais il faut remarquer que l'aire due à la rotation du Soleil est une quantité considérable, et qui ne peut être omise dans aucun cas : car, en supposant d'abord le Soleil homogène, je trouve que cette aire vaut plus de 50 fois celle que la terre décrit en vertu de son mouvement dans son orbite annuelle. Si, comme il est vraisemblable, la densité du Soleil n'est pas uniforme, mais qu'elle augmente de la surface au centre, en raison de la profondeur, ou bien encore, suivant cette loi de densité que Laplace emploie pour la figure de la Terre, dans le tome V de sa *Mécanique céleste*, et qui fait la densité proportionnelle à la racine carrée de la pression, je trouve que l'aire décrite a encore les deux tiers de la valeur précédente. Et dans l'hypothèse même où la densité irait en croissant, depuis la surface, où elle serait nulle, jusqu'au centre, où elle deviendrait infinie, comme ferait l'ordonnée d'une hyperbole équilatère qui s'avancerait parallèlement à elle-même pour se confondre avec l'asymptote, je trouve que l'aire dont il s'agit vaudrait encore la moitié de celle qui a lieu dans le cas de l'homogénéité. De sorte que, dans cette hypothèse qui paraît extrême, le plan invariable de Laplace, déterminé

sans tenir compte de cette quantité, diffère autant du véritable que si l'on eût oublié dans le calcul au moins 25 globes tels que le nôtre, qui auraient circulé comme lui, à la même distance du Soleil, et dans un plan incliné d'environ 7° au plan de notre écliptique. Cette omission altère donc d'une manière très-sensible la position du plan invariable : car il est aisé de voir qu'elle change de plusieurs minutes son inclinaison à l'écliptique, et de plusieurs degrés la longitude de son nœud ascendant. Ainsi, il paraît aussi nécessaire pour l'application que pour la théorie d'avoir au moins égard, dans le système du monde, à cette partie des aires qui vient de la rotation connue du soleil.

## X.

Il peut paraître surprenant que Laplace, qui le premier a eu l'idée de chercher, dans le système du monde, la position d'un plan invariable déterminé par la condition que la somme des aires projetées y soit un *maximum*, n'ait considéré dans son analyse que les aires décrites par les planètes en vertu de leurs mouvements de révolution autour du Soleil, et qu'il ait oublié, non-seulement les aires dues aux révolutions particulières des satellites, mais encore celles qui naissent de la rotation de ces planètes et du Soleil lui-même sur leurs propres axes. Et si l'on est surpris que cette omission singulière ait pu avoir lieu, on ne l'est pas moins qu'elle ait échappé jusqu'ici à ceux qui ont pu étudier ce point capital de la Mécanique céleste. Par le peu que j'ai dit, on voit bien ce qui doit manquer aux formules de Laplace : le défaut est sensible ; mais ce que je cherche ici est la cause naturelle qui y a fait tomber.

Or, avec un peu de réflexion, il n'est pas difficile de remonter à la source de cette erreur, et de la trouver dans cette théorie même qu'on avait autrefois des aires ou des moments : théorie imparfaite où l'on ne savait pas d'une manière précise ce que ces quantités représentent, je ne dis pas dans le calcul, mais dans la science des forces considérée en elle-même. Et en effet, pour Laplace comme pour les anciens auteurs, les moments ou les aires ne sont que de simples quantités numériques ou géométriques, de pures expressions d'analyse, qui se présentent dans les équations de l'équilibre ou du mouvement des systèmes, et auxquelles on aurait simplement donné un nom pour abréger le discours. Sous ce point de vue géométrique, le plan invariable que l'auteur considère n'est donc qu'un certain plan choisi entre les autres par la condition que la projection des aires y soit la plus grande; ou plutôt, c'est l'un des trois plans coordonnés, choisi de manière que la projection des aires soit nulle sur les deux autres; ce qui est une pure transformation de coordonnées, qui paraît propre à simplifier le calcul, en faisant disparaître, comme on l'a dit, deux constantes arbitraires. Or on ne voit là que des quantités abstraites, de simples formules d'analyse, sans aucune idée de la nature propre des grandeurs dont il s'agit dans la science de l'équilibre ou du mouvement des systèmes. Et, comme l'idée de considérer les aires dans le système du monde vient de cette fameuse loi de Képler, qui n'est relative qu'aux secteurs décrits par les rayons vecteurs des planètes dans leur mouvement elliptique autour du Soleil, il est assez naturel que Laplace ne songe qu'à ces mêmes aires dues aux révolutions des planètes, et que, dans la théorie de son

plan invariable, il oublie toutes les autres. Il semble d'ailleurs que ces autres aires, produites par les mouvements particuliers des satellites et par la rotation des planètes sur elles-mêmes, n'étant point tracées, comme les premières, autour d'un même centre, mais se décrivant à part autour de divers centres particuliers, elles sont en quelque sorte des aires indépendantes, et qu'elles ne doivent point entrer dans la combinaison dont il s'agit. Ainsi, en supposant même que la considération de ces quantités se fût présentée un moment à l'esprit, on voit qu'elle aurait pu être aussitôt écartée comme une idée étrangère, et sans qu'on en fît aucune mention. C'est ce qui explique naturellement l'omission ou l'erreur dont je parle et qui a pu si facilement échapper dans l'ancienne théorie. Mais, dans nos principes, cette omission est impossible : car, pour nous, les aires ne sont point des surfaces qu'on projette sur tel ou tel plan, mais de véritables forces de rotation ou des *couples* qui s'exercent dans le système ; et il ne s'agit pas ici de simplifier un calcul ou de chercher un plan sur lequel la projection des aires soit un *maximum*, mais bien de composer entre eux ces couples qui agissent, et de déterminer la grandeur et la position du couple unique qui en résulte : couple remarquable, dont on démontre que le plan et la grandeur se conservent les mêmes dans tout le cours du mouvement, malgré les changements qui arrivent aux grandeurs et aux inclinaisons mutuelles des différents couples qui le composent. Par cette notion dynamique des aires, il suffit donc de jeter les yeux sur le système du monde pour voir que l'aire *maximum*, ou, pour mieux dire, que l'aire *résultante* doit être composée non-seulement de celles qui viennent du mouvement des planètes dans leurs

orbites, mais encore de celles qui naissent des mouvements particuliers des satellites et de la rotation de tous ces corps sur leurs propres axes : car, bien que ces aires soient décrites autour de différents centres, comme elles ne sont qu'une expression géométrique des couples qui les produisent, il est évident qu'elles doivent être toutes rapportées à un seul et même foyer, et se composer ensemble comme si leurs plans y étaient tous transportés parallèlement à eux-mêmes.

Ainsi, la composition des couples, qui a étendu et simplifié toute la doctrine des aires, aura servi encore à nous faire découvrir une erreur qui pouvait rester longtemps cachée dans une application de la Mécanique à l'un des plus grands objets du système du monde. Cet exemple nous fait sentir toute l'importance qu'on doit attacher aux notions primitives et aux vrais principes des choses ; car le calcul n'est qu'un instrument, qui ne produit rien par lui-même, et qui ne rend en quelque sorte que les idées qu'on lui confie. Si nous n'avons que des notions imparfaites, ou si l'esprit ne regarde la question que d'un point de vue borné, ni l'analyse ni le calcul ne lui apporteront plus de lumière, et ne donneront à nos résultats plus de justesse ou plus d'étendue : au contraire, on peut dire que cet art de réaliser en quelque sorte par le calcul de fausses ou de vagues conceptions n'est propre qu'à rendre l'erreur plus durable, en lui donnant, pour ainsi dire, une sorte de consistance.

## XI.

Au reste, si l'on veut voir, par le calcul même, le défaut des formules de Laplace, il n'y a qu'à considérer

les trois équations qu'il emploie, et d'où il part comme d'une expression exacte de la conservation des aires sur les trois plans rectangles des axes coordonnés.

En plaçant l'origine ou le foyer des rayons vecteurs au commun centre de gravité de tous les corps $m$, $m'$, $m''$, etc., qui composent le système proposé, et nommant $x$, $y$, $z$ les trois coordonnées du centre du corps $m$; $x'$, $y'$, $z'$ celles du centre de $m'$, etc.; et employant, pour abréger, le signe $\Sigma$ pour indiquer la somme de tous les termes semblables à celui qu'on écrit à la suite de ce signe, les trois équations dont il s'agit sont représentées simplement par

$$\Sigma m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c = constante,$$

$$\Sigma m \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c' = constante,$$

$$\Sigma m \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c'' = constante.$$

Or je dis que ces formules ne sont vraies qu'autant que les corps du système y sont réellement des points dont les masses respectives seraient $m$, $m'$, $m''$, etc.

Que si $m$, par exemple, est un corps de dimension finie, le terme $m \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)$, qui s'y rapporte dans la première équation, n'exprime pas la projection, sur le plan des $xy$, de l'aire décrite autour de l'origine par le mouvement de ce corps $m$. Et, en effet, il est évident que cette aire est la somme de toutes celles qui sont dues au mouvement de toutes les particules du même corps. Or, en nommant X et Y les

coordonnées de la particule $dm$ par rapport aux mêmes axes, il est clair que la somme dont il s'agit est l'intégrale $\int\left(X\frac{dX}{dt} - Y\frac{dY}{dt}\right)dm$ étendue à la masse entière du corps $m$; et l'on va voir que cette intégrale n'est pas exprimée, comme on le suppose, par le terme $m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$.

Soient, en effet, $\xi$ et $\eta$ les deux coordonnées de la particule $dm$, parallèles aux $x$ et $y$, mais rapportées au centre de gravité du corps $m$, de sorte que l'on ait

$$X = x + \xi, \qquad Y = y + \eta,$$

et
$$\frac{dX}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{d\xi}{dt}, \qquad \frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{d\eta}{dt}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'intégrale précédente $\int\left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dx}{dt}\right)dm$, et si l'on observe que, l'origine des $\xi$ et $\eta$ étant au centre de gravité de $m$, on a

$$\int \xi dm = 0, \quad \int \eta dm = 0, \quad \int \frac{d\xi}{dt}\,dm = 0, \quad \int \frac{d\eta}{dt}\,dm = 0,$$

on trouvera que l'intégrale $\int\left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right)dm$ a pour valeur la somme des deux termes

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) + \int\left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)dm;$$

de sorte que la valeur de l'aire décrite diffère précisément de la valeur qu'on emploie, de l'intégrale

$\int\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)dm$, qui exprime l'aire due à la rotation de $m$ sur son propre centre; quantité qui doit être ajoutée à l'aire $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$, si la rotation du corps a lieu dans le même sens que son mouvement de révolution, et qui doit en être retranchée dans le cas contraire.

Les véritables équations qui expriment la conservation des aires dans le système sont donc, en nommant $\zeta$ la troisième coordonnée de $dm$ relative au centre de $m$,

$$\Sigma\left\{m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)+\int\left(\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}\right)dm\right\}=a=const.,$$

$$\Sigma\left\{m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+\int\left(\zeta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\zeta}{dt}\right)dm\right\}=b=const.,$$

$$\Sigma\left\{m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+\int\left(\eta\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\eta}{dt}\right)dm\right\}=c=const.,$$

D'où l'on voit que, dans cette théorie des aires appliquée au système du monde, lorsqu'on réduisait les planètes et le Soleil lui-même à des points massifs placés dans leurs centres de gravité, on supprimait, sans s'en apercevoir, toute cette partie des aires qui naissent de leurs mouvements de rotation sur eux-mêmes. L'erreur est toute semblable à celle qui nous ferait prendre pour le moment d'inertie d'un corps relatif à un certain axe extérieur le produit de la masse de ce corps par le carré de la distance de son centre de gravité à l'axe que l'on considère; tandis que la vraie valeur de ce moment d'inertie est égale au produit précédent, augmenté du moment d'inertie du corps par rapport à l'axe parallèle qui passe en son centre de gravité.

Mais, indépendamment de ces aires dues aux rotations du Soleil et des planètes, on avait encore oublié celles qui naissent des mouvements particuliers des satellites; car, pour en tenir compte, il ne suffit pas, comme on peut le croire, de prendre pour la valeur de $m$ la masse de la planète réunie à celle de ses satellites; il faut encore ajouter les termes qui expriment les aires dues aux révolutions particulières de cette planète et de ses satellites autour de leur commun centre de gravité ; et il faudrait même ajouter les petites aires qui sont dues aux rotations des satellites sur eux-mêmes, si l'on voulait être dans toute la rigueur des choses.

## XII.

Les formules employées par Laplace ne peuvent donc (même en faisant abstraction des satellites) exprimer exactement les aires décrites que dans le cas où les corps $m$, $m'$, $m''$, etc., seraient privés de toute rotation sur eux-mêmes, ou bien encore seraient des points massifs (et dont il faudrait même supposer que la rotation n'est pas infinie); car il n'y a que l'une ou l'autre de ces hypothèses qui puisse faire disparaître les termes qu'il a oubliés dans son analyse. Ces formules ne donnent donc point, et ne donneront jamais les valeurs des aires décrites dans le système des corps célestes, car tous ces corps sont de dimension finie, et ils tournent actuellement sur leurs axes; et quand bien même il arriverait, par quelque cause que ce fût, que chacun d'eux se condensât, et se réduisît en quelque sorte à son centre de gravité, les aires actuelles dues

à leurs mouvements de rotation ne s'évanouiraient point. Par le principe même des aires, à mesure que chaque corps se condenserait, il serait, pour ainsi dire, forcé de tourner plus vite, et de manière que l'aire due à sa rotation fût toujours conservée : d'où l'on voit que les expressions qui forment les premiers membres des équations de Laplace n'en seraient pas moins incomplètes qu'auparavant, et qu'ainsi ces équations ne peuvent jamais donner le plan du *maximum* des aires, le seul qui soit rigoureusement invariable.

## XIII.

A la vérité, si chaque corps était infiniment petit, et que, par conséquent, les distances de ses différentes molécules à un centre extérieur d'attraction pussent être regardées comme égales entre elles, on pourrait dire que la rotation de ce corps sur lui-même ne serait point altérée par l'attraction des autres. Et il en serait de même si chaque corps, au lieu d'être un point massif, était un globe parfait de dimension finie, formé de couches concentriques dont chacune serait d'une densité uniforme dans toute son étendue; car, pour chacun de ces globes, les attractions des autres se réduisant toujours à une force simple qui passerait par le centre de ce globe, il est évident que son mouvement de rotation n'en serait pas plus troublé que dans le cas précédent. Dans l'une ou l'autre de ces deux suppositions, on pourrait donc dire que la projection des aires dues aux rotations des corps serait à part une quantité constante sur chacun des plans coordonnés; que, par conséquent, les projections des aires dues aux seuls mouvements de révolution seraient aussi à part

des quantités constantes sur les mêmes plans, et qu'ainsi le plan déterminé par les équations de Laplace, s'il n'est plus, comme je l'ai fait voir, le plan du *maximum* des aires, est du moins un certain plan qui demeure invariable de position, malgré l'action mutuelle des différents corps du système.

## XIV.

Quoique les deux hypothèses précédentes n'aient point lieu dans la nature, et qu'on puisse se dispenser de les examiner, il n'est peut-être pas inutile de montrer ici tout ce qu'elles ont de faux en elles-mêmes et de contraire à la question de philosophie naturelle dont il s'agit.

Et d'abord on pourrait remarquer que si chacun des corps célestes était un globe parfait, tel que je viens de le dire, il serait fort inutile de faire un long calcul (et dépendant même de données assez mal connues), pour trouver un plan qui fût invariable dans le système du monde : car il suffirait de prendre comme tel le plan de l'équateur de l'un de ces globes, et, par exemple, celui du Soleil, ou, ce qui serait encore plus simple et plus facile, celui de la terre que nous habitons. Il est clair que cet équateur resterait toujours parallèle à lui-même dans l'espace, et qu'on y pourrait rapporter avec précision les plans des différentes orbites des corps célestes. Cette supposition, comme on voit, ne convient guère à notre système, puisque le seul aplatissement très-petit de notre globe vers ses deux pôles suffit déjà pour déranger à chaque instant notre équateur, comme on le reconnaît dans le

ciel par le phénomène sensible de la précession des équinoxes.*

Mais, pour en venir à cette hypothèse imaginaire où les planètes seraient des globes parfaits, je dis que, même dans ce cas, il ne serait pas permis de proposer comme un plan qui doit rester invariable dans toute la suite des siècles, ni l'un des équateurs de ces globes, ni le plan déterminé par les formules de Laplace, où l'on ne tient pas compte des aires dues aux rotations des corps du système. Et en effet, pour affirmer qu'un tel plan demeurera invariable, il faudrait être assuré que la figure des corps ne sera point changée, soit par quelque rencontre ou choc mutuel qui pourrait survenir entre eux, soit par quelque force intérieure qui viendrait à s'y développer, ou même par quelque explosion subite qui ferait éclater le corps en plusieurs fragments, comme M Olbers, et après lui quelques géomètres, conjecturent que cela est déjà arrivé à l'une des anciennes planètes de notre système, laquelle, en se brisant, aurait produit les quatre planètes nouvelles qu'on a nommées *Pallas*, *Cérès*, *Junon* et *Vesta*. Or, la figure du corps étant ainsi changée, soit par une de ces causes, soit par tout autre qui nous est inconnue, l'aire due à la rotation de ce corps sur lui-même commencerait d'être altérée par l'action des autres, et cesserait d'être à part une quantité constante. Les aires dues aux mouvements de révolution cesseraient donc aussi d'être constantes, et ni l'équateur du corps ni le plan dont j'ai parlé ne seraient plus invariables de position dans l'espace. Ainsi, l'on voit que tous ces plans viendraient à changer, tandis que le nôtre resterait le même, et que la grandeur de l'aire qui y tombe n'aurait pu éprouver la moindre altération par aucune

de ces causes qui auraient troublé toutes les aires individuelles qui la composent.

## XV.

Tel est donc, pour un système libre de toute action étrangère, le plan unique dont l'invariabilité puisse être assurée dans toute la suite des siècles. Ce grand équateur seul, et l'aire qui s'y projette, ne dépendent ni de la liaison mutuelle des corps, ni de la loi de leur attraction, qui pourraient même changer arbitrairement, soit par degrés insensibles, soit d'une manière brusque, comme on voudra le supposer. Ainsi, dans notre système planétaire, on pourrait imaginer que la loi d'attraction devînt tout autre, ou que la gravité même vînt à cesser, ou que la figure des corps fût altérée par des forces quelconques, ou même par les mouvements volontaires des êtres animés qui les habitent; on pourrait supposer que les planètes, qui aujourd'hui nagent librement dans l'espace, vinssent tout à coup à se lier ensemble d'une manière quelconque, et, par exemple, de manière à former un système entièrement solide, etc.; et, malgré tous ces changements, le plan invariable des aires se retrouverait exactement dans la même position qu'il occupe aujourd'hui, et qu'il a toujours occupée depuis l'origine des choses : propriété remarquable qui caractérise ce plan, et qui n'appartient à nul autre déterminé sans tenir compte de toutes les aires actuellement décrites dans le système.

## XVI.

On trouvera peut-être que j'insiste sur des vérités claires; mais la question mérite d'être développée : et

d'ailleurs, par quelques difficultés qui ont été faites à ce sujet, j'ai pu croire que notre théorie n'avait pas été bien comprise. J'ai donc voulu montrer avec évidence que, dans notre système, il n'y a qu'un seul plan invariable, comme il n'y a qu'un seul point qui soit le centre de gravité, et une seule droite qui en marque la route dans l'espace; que la forme des mobiles, la loi particulière de l'attraction réciproque au carré des distances, n'entrent absolument pour rien dans cette théorie, et que, par conséquent, elle ne peut être modifiée par aucune raison qu'on voudrait tirer de ces circonstances étrangères; que d'ailleurs ce plan invariable ne saurait être déterminé avec trop de précision, et qu'il doit l'être, autant que possible, indépendamment de toute autre théorie, puisque, par l'hypothèse même, il est destiné à faire reconnaître les plus petits changements qui peuvent survenir dans le système, et à rectifier ou confirmer nos autres calculs sur les variations des mouvements célestes.

## XVII.

### Détermination *de l'équateur dont il s'agit.*

Quant à la détermination effective de ce plan, elle suppose à la vérité que l'on connaisse, outre la proportion des masses des différents corps célestes, les valeurs de leurs moments d'inertie par rapport à leurs axes de rotation. Les masses nous sont déjà à peu près connues; mais les moments d'inertie ne le sont point, parce qu'ils dépendent de la loi de densité de ces corps, c'est-à-dire de la loi suivant laquelle la matière, de la surface au centre, est répandue dans chacun d'eux.

Or c'est ce que nous ignorons entièrement, et c'est ce que le temps seul peut nous apprendre, comme je le montrerai tout à l'heure par la comparaison même que l'on pourra faire de la théorie avec les observations. Mais, quand bien même on n'aurait pu s'élever jamais à la connaissance précise de ces éléments nécessaires du calcul, j'observe qu'il n'en convenait pas moins aux géomètres de présenter d'abord une théorie exacte, et de lui donner toute cette rigueur qui fait le caractère propre des vérités mathématiques. C'était un premier objet qu'il fallait remplir pour l'exactitude et la perfection de la science. Mais je dis plus : c'est qu'il convient aussi aux astronomes d'en commencer dès aujourd'hui l'application au système du monde, en employant les meilleures données que nous ayons sur les masses des corps célestes et les valeurs les plus vraisemblables que nous puissions attribuer aux aires qui naissent de leur rotation sur eux-mêmes. Et, en effet, ce premier résultat du calcul et ceux que les astronomes à venir trouveront dans leur temps par des calculs semblables, étant comparés les uns aux autres, pourront servir à corriger de siècle en siècle les valeurs approchées de ces éléments qu'on n'avait pu d'abord mesurer avec précision. En observant la position du plan invariable par rapport aux étoiles, on cherchera si, parmi les changements survenus, les uns pouvant être attribués aux mouvements propres de quelques étoiles, les autres ne pourraient pas s'expliquer par le seul déplacement du plan que l'on considère; et alors on essayera de rectifier de la manière la plus probable les valeurs employées dans la première détermination.

## XVIII.

Quoique cette méthode soit conforme à celle des astronomes, et paraisse ici la seule qui puisse nous conduire, il faut avouer pourtant que, dans cette application de la théorie, l'esprit ne se trouve pas complétement satisfait. On voudrait, s'il est possible, une approximation directe et sûre, qui fût exempte d'incertitude et de tâtonnement. La difficulté paraît grande : car, ne connaissant autour de nous rien de fixe dans l'espace, et ne pouvant ainsi nous assurer des mouvements réels des corps, il ne nous reste qu'à essayer de les démêler dans les apparences, afin de rectifier successivement nos premières suppositions.

Mais, en y réfléchissant davantage, j'ai trouvé que la théorie même nous offrait une voie directe pour aller au but; et voici une conséquence nouvelle qui prouve qu'avec des observations très-précises, on peut parvenir un jour à la connaissance des masses et des moments d'inertie des corps célestes, et, par conséquent, à la détermination du plan invariable, sans rien emprunter d'ailleurs, je veux dire sans supposer aucune autre théorie ni aucune notion préalable des valeurs approchées de ces éléments qui nous sont inconnus.

Imaginez, en effet, que l'on forme à une époque quelconque l'expression analytique de la grandeur de l'aire résultante, en y mettant les valeurs des lignes, des angles et des vitesses que peut donner l'observation à cette époque, et en y laissant comme autant d'indéterminées ou d'inconnues les masses et les moments d'inertie des différents corps du système. Si vous supposez qu'on

répète cette opération à autant d'époques différentes qu'il y a d'inconnues à découvrir, vous aurez autant d'expressions différentes de cette aire, qui se compose de toutes les aires décrites dans le système; et comme cette résultante est toujours la même, vous pourrez égaler vos expressions deux à deux, et former ainsi autant d'équations qu'il y a d'inconnues dans la question que l'on considère. Vous pourrez donc alors déterminer ces inconnues, et de là conclure la position du plan invariable, non-seulement à cette époque, mais encore à toutes les époques antérieures où les observations auront été faites. Ainsi, la théorie se suffit, pour ainsi dire, à elle-même, et elle n'a besoin, pour être appliquée, que des données immédiates de l'observation. On peut donc, par les seuls mouvements des corps célestes, observés à différentes époques éloignées, s'élever à la connaissance de leurs masses et de leurs moments d'inertie, et cela indépendamment de toute notion sur ces valeurs approchées, sur la nature des orbites que les corps décrivent, et même sur la loi d'attraction qui existe entre eux.

## XIX.

Voilà sans doute un des résultats les plus remarquables des principes généraux de la Mécanique. De ce lieu de l'espace où nous sommes confinés, nous ne pouvons mesurer que des lignes et des angles, et compter le temps qui s'écoule; mais il paraît comme impossible de mesurer les masses et les moments d'inertie de différents corps dont nous ne pouvons approcher, parce que ces quantités ne dépendent pas des seules

dimensions visibles de la figure, mais de la matière dont les corps sont formés, ou de la loi de leur densité, qui nous est entièrement inconnue. Cependant, s'il arrive que ces corps s'attirent suivant une loi quelconque, connue ou inconnue, qui soit constante ou même variable avec le temps, nous voyons ici qu'il suffira d'observer les distances et les mouvements de ces corps pour découvrir la proportion qui règne entre leurs masses, et même entre leurs moments d'inertie; car les observations, étant faites à autant d'époques différentes qu'il y a d'inconnues, fourniront toutes les équations nécessaires pour les déterminer.

## XX.

Dans le système du monde, en regardant une planète comme très-petite par rapport au Soleil, et un satellite comme très-petit par rapport à sa planète, et supposant d'ailleurs que chaque corps n'obéisse qu'à la force principale qui l'attire, on a reconnu de bonne heure, par les vitesses des corps comparées à leurs distances au centre de leurs révolutions, que l'attraction est en raison inverse du carré de la distance; et de là on a tiré la proportion des masses du Soleil et des planètes principales qui ont des satellites. Mais cette détermination, quelque ingénieuse et admirable qu'elle nous paraisse et qu'elle soit en effet, ne me semble pas tirée des vrais principes de la science, je veux dire ici des seuls principes généraux qui pourraient également la donner dans toute autre loi d'attraction. Elle est fondée sur la supposition que la masse de chaque corps peut être négligée par rapport à celle du corps principal qui l'attire, et sur la connaissance d'une loi suivant laquelle l'attraction de ce corps s'exerce

à différentes distances. Or je trouve ici que la proportion des masses peut se déterminer par la seule observation des distances et des vitesses des corps, sans aucune idée de leurs grandeurs approchées, ni de la loi suivant laquelle ils s'attirent. Il suffit qu'ils s'attirent, et que, par cette action égale et contraire, ils troublent mutuellement les aires qu'ils décrivent autour de leur commun centre de gravité. Par cette perturbation même, les aires individuelles et les plans de ces aires sont changés avec le temps; et comme il y a une quantité qui ne change point, quand bien même la liaison et l'attraction des corps varieraient d'une manière quelconque, il s'ensuit qu'on peut former avec le temps assez d'équations pour déterminer les masses respectives de tous ces corps sans rien emprunter à la théorie de la gravitation universelle.

Ce n'est pas qu'on ne doive à Képler et à Newton la même admiration et la même reconnaissance pour la découverte d'un rapport ou d'une loi qui nous apprend, dès aujourd'hui, la proportion de certaines quantités que le seul principe général des aires n'aurait pu nous donner que dans un avenir très-éloigné. Mais je ne m'occupe ici que de la science considérée en elle-même, dans ce qu'elle a de plus général et de plus parfait. Et d'ailleurs ces principes généraux nous seraient toujours nécessaires : car, pour les valeurs des moments d'inertie des corps célestes, il me semble que la loi connue de l'attraction ne peut rien nous apprendre, et je ne vois pas qu'on les puisse découvrir autrement que par ces principes et des observations très-exactes faites à de très-longs intervalles. Ces quantités, et la position précise de l'équateur de notre système, ne peuvent donc être déterminées de bien long-

temps. Que si pourtant on voulait se borner à la considération du Soleil, dont la rotation influe beaucoup plus que celle des autres planètes sur la grandeur de l'aire résultante, il faudrait un temps moins considérable; car il suffirait de former les expressions de cette aire à deux époques différentes, et de les égaler, ce qui pourrait donner le moment d'inertie de ce grand corps par rapport à son axe de rotation, en supposant toutefois des observations aussi précises et aussi répétées que l'exige une recherche aussi délicate.

## XXI.

Mais, pour achever le développement de cette grande théorie, imaginons qu'avec le temps, la grandeur et le plan de l'aire résultante aient été déterminés dans notre système planétaire, et voyons ce qu'au delà de cet avenir les observations et le calcul pourraient encore nous apprendre. Il est évident que si l'on continuait de former des équations semblables aux précédentes, pour de nouvelles époques ultérieures, ces équations devraient s'accorder à donner la même valeur pour la grandeur de l'aire résultante. Si cet accord a lieu, on conclura qu'on a le véritable équateur du système solaire, au moyen duquel on reconnaîtra les changements réels survenus dans la position mutuelle des orbites des corps célestes. Mais si les équations viennent à présenter des valeurs différentes, il faudra conclure qu'il y a dans le système quelque action étrangère qui vient, ou des comètes, ou des étoiles, ou de quelque corps invisible et ignoré dont on n'a pas tenu compte, et qu'ainsi le couple qu'on a calculé n'est pas le couple résultant de

tous ceux qui animent l'ensemble des corps que l'on considère.

Ainsi, la théorie et l'observation continueront d'ajouter à nos connaissances. On verra si cette action des corps étrangers sur le système des planètes et du Soleil peut être ou non regardée comme insensible; si le grand équateur de ce système demeure toujours parallèle à lui-même dans l'espace, ou bien si cet équateur change aussi à la longue, comme celui de notre globe, et si ses nœuds, par un mouvement bien plus insensible encore, rétrogradent de même sur le grand orbe que le Soleil peut décrire autour de quelque centre éloigné. C'est probablement ce qui arrive, car il serait hors de toute vraisemblance que les étoiles n'eussent aucune action sur le Soleil et les planètes qui l'accompagnent; et de cette action inégale sur les différents points du système doit résulter à chaque instant un couple infiniment petit qui altère insensiblement la position du couple actuel qui anime ce système.

## XXII.

Ainsi, notre plan invariable lui-même avec le temps pourra changer. Dans nos théorèmes mathématiques, tout est rigoureux. La conservation du mouvement du centre de gravité et celle des aires ont lieu sans la moindre altération, parce qu'on y suppose un système parfaitement libre, c'est-à-dire tel qu'il serait s'il existait seul dans l'espace. Mais, dans la nature, on ne peut plus faire cette supposition, puisque au delà de notre système solaire nous découvrons tant d'autres corps qui peuvent agir sur lui. Ne perdons jamais de vue que ces

idées de constance et d'uniformité qui plaisent tant à l'esprit dans l'étude de la nature n'ont, au fond, rien d'absolu ; elles ne conviennent qu'à ce peu d'étendue et de durée qui nous est accordé dans le temps et dans l'espace. Il en est du développement de ces grands phénomènes comme d'une courbe immense dont nous ne verrions qu'un arc d'une petite longueur, et que nous prendrions pour une ligne droite dans tout le reste de son cours. Pour arriver à la constance absolue, il faudrait remonter à tout l'ensemble des corps de cet univers, de manière qu'il ne restât plus rien d'extérieur à considérer. C'est alors qu'on pourrait dire de cet ensemble, que le mouvement du centre de gravité est rigoureusement uniforme et rectiligne, et que la résultante générale de toutes les aires décrites est inaltérable de grandeur et de position dans l'espace absolu. Mais alors, comme il n'y aurait plus aucune raison pour que ce centre fût porté d'un côté plutôt que de tout autre, ni que l'ensemble des corps tournât dans un certain sens plutôt que dans le sens contraire, il faudrait conclure que le commun centre de gravité est parfaitement en repos, et que la résultante générale des aires est entièrement nulle. Ainsi, l'on trouverait que toutes les forces et tous les couples de l'univers se balancent : je veux dire que si tous les corps qui existent venaient à se lier entre eux de manière à former un système invariable de figure, ce grand tout deviendrait parfaitement immobile dans l'espace absolu.

## XXIII.

Mais ces dernières considérations, qui sont si loin de notre portée, ne pourraient même, comme on le

voit, nous conduire à rien qui fût à notre usage ; car, de ce dernier centre où l'on se placerait un moment par la pensée, on ne verrait plus d'aires décrites dans un sens qui ne fussent détruites, et pour ainsi dire effacées par d'autres aires décrites en sens contraire : de sorte que la considération de toutes les aires du système ne pourrait plus donner lieu à la détermination d'aucun plan. Ainsi, les vérités qu'on veut rendre absolues, à force d'abstraire ou de généraliser, s'évanouissent en quelque sorte, ou deviennent comme des *axiomes* qui n'apprennent plus rien. Dans toutes nos lois les plus *générales*, il n'y a que celles qui conservent encore quelque chose de *relatif* qui puissent nous instruire, et partant nous intéresser. Pour nous, l'attraction des étoiles, même les plus voisines, jusqu'ici paraît insensible, et l'altération qu'elle pourrait causer dans la position de l'équateur de notre système ne sera, je crois, de longtemps aperçue. Il faut donc nous en tenir à la considération de cet équateur, essayer de le déterminer, reconnaître, s'il est posible, ses variations, afin d'acquérir quelque idée nouvelle sur la constitution de notre système, et sur les changements qu'il peut éprouver par l'action des comètes et des étoiles, ou d'autres corps inconnus de cet univers.

---

## ADDITION *au Mémoire qui précède.*

En regardant le Soleil, les planètes et leurs satellites comme un système libre de toute action étrangère, il est démontré que le nouveau plan des aires que je propose sous le nom d'*équateur* du système du monde

est le seul qui soit rigoureusement invariable, c'est-à-dire qui reste toujours parallèle à lui-même dans l'espace.

Il est certain que cet *équateur* n'est pas le même que le plan nommé *invariable* par Laplace; qu'il y a une différence de plusieurs minutes entre leurs inclinaisons au plan de l'écliptique, et une différence de plusieurs degrés entre les longitudes de leurs nœuds ascendants : ce qui est ici une différence de position très-considérable.

Il est encore évident que le plan de Laplace ne peut plus être nommé le plan du *maximum* des aires, puisque, dans sa détermination, Laplace n'a pas tenu compte de ces aires décrites qui viennent des rotations des corps célestes, et des révolutions particulières de chaque planète principale et de ses satellites autour de leur commun centre de gravité.

Ces trois points de doctrine sont incontestables, et je crois même incontestés; mais voici ce qu'on a pu dire.

Si l'on considère la petitesse des corps célestes par rapport à leurs distances mutuelles, la presque sphéricité de ces corps, et le peu d'influence que leur attraction réciproque doit avoir pour troubler leurs rotations sur eux-mêmes, il semble que tous ces corps pourraient être ici regardés comme autant de points massifs, et que si le plan de Laplace n'est pas le plan du *maximum* des aires, et par cela même n'est pas rigoureusement invariable, il est du moins un certain plan qui doit varier extrêmement peu ; et que, par rapport aux plans des orbites célestes, il est pour ainsi dire *assez invariable* pour nous faire reconnaître les plus petits changemets qui pourraient survenir dans la position de ces orbites : de

sorte que, pour le système du monde tel qu'il est constitué, le plan dont il s'agit peut conserver encore le nom de *plan invariable;* ce qui paraît d'abord assez plausible.

Mais il faut bien remarquer qu'une proposition de ce genre, pour être admissible, je ne dis pas en Géométrie, mais seulement en Astronomie pratique, aurait besoin d'être fondée sur des raisons plus précises; car il ne suffirait pas de montrer que les variations du plan de Laplace sont extrêmement petites, ce qui n'est pas douteux; mais il faudrait prouver qu'elles sont beaucoup plus petites que celles des autres plans qu'on y veut rapporter dans la vue de reconnaître les petits mouvements qu'ils pourraient avoir dans l'espace. Voilà nettement ce qu'il faudrait prouver, si la chose est possible; mais c'est ce que personne n'a encore fait, et ne pourra jamais faire, comme on va le voir tout à l'heure.

On conviendra d'abord que, pour nous, contents d'avoir substitué un plan rigoureusement invariable à la place d'un autre qui n'est point démontré tel, nous pourrions nous dispenser d'examiner la question peu géométrique dont il s'agit: car il est clair que ce ne serait pas à nous, mais à ceux qui essayent de conserver au plan de Laplace la propriété d'être invariable, de faire voir qu'en effet ce plan varie si peu, qu'il convient à cet usage délicat pour lequel il est proposé. Mais, afin de leur épargner cette fausse et vaine recherche, je vais montrer que ce plan, prétendu invariable, *varie;* que sa variation n'est pas extrêmement petite, comme on pourrait le croire, mais qu'elle est du même ordre que la précession des équinoxes, mouvement sensible dans le ciel, et remarqué, il y a deux mille ans, par Hipparque, un des plus grands astronomes de l'antiquité.

Or, pour voir sans calcul, et de la manière la plus évidente, ce défaut des formules de Laplace, il n'y a qu'à les appliquer au cas le plus simple de tous, à celui où le système ne serait composé que de deux corps.

Ne considérons donc que la Terre et le Soleil, et supposons même, afin de rendre la chose plus manifeste, que le Soleil soit parfaitement sphérique, qu'il ne tourne point sur son axe, et que son centre agisse exactement comme un point où toute la masse serait concentrée.

Par les formules de Laplace, il est évident que le plan invariable serait le plan même de l'orbite de la Terre, ou ce qu'on appelle le plan de l'*écliptique :* de sorte que ce plan serait immobile, ou toujours parallèle à lui-même dans l'espace. Or je dis que, dans ce cas (le plus favorable qu'on puisse imaginer pour la théorie de Laplace), les nœuds de l'écliptique sur un plan fixe varieraient d'une manière très-sensible.

Et, en effet, soit $a$ la grandeur de l'aire qui vient de la rotation de la Terre sur elle-même, et dont le plan est l'*équateur;* soit A l'aire qui vient de la révolution de la Terre autour du Soleil, et dont le plan est l'*écliptique*. Il est certain, par notre théorie, que le *vrai plan invariable* serait celui de l'aire G qui serait composée des deux aires $a$ et A. Or le plan (G) de cette aire résultante passe nécessairement par la commune intersection des plans des deux aires composantes; et, par conséquent, il passe toujours par la commune intersection de l'équateur et de l'écliptique, ou ce qu'on appelle la *ligne des nœuds*. Il est donc certain qu'à une époque quelconque du mouvement, la ligne des nœuds serait située dans le plan (G) de l'aire résultante. Or, comme ce plan (G) est réellement inva-

riable, il est évident que si le plan de l'écliptique l'était aussi, la ligne des nœuds serait immobile dans l'espace. Mais on sait que, par la seule action du Soleil sur le sphéroïde terrestre, la ligne des nœuds aurait un mouvement de précession qui, pour fixer les idées, serait d'environ 15″, si l'on évalue l'action du Soleil aux $\frac{3}{7}$ de celle de la Lune dans la précession totale qui est de 50″ par année. Donc il est impossible que le plan de l'écliptique soit invariable, et l'on voit même qu'il se mouvrait avec l'équateur de telle manière que leur commune intersection décrirait notre plan fixe (G) par un mouvement angulaire de 15″ par année, ou de 15′ en soixante ans.

Ainsi, dans ce cas si simple que j'examine, le plan donné comme invariable par les formules de Laplace change d'une manière bien sensible, puisque ses nœuds sur notre plan fixe s'y mouvraient exactement comme les deux points de l'équinoxe. A la vérité, l'aire $a$ due à la rotation de la Terre étant très-petite par rapport à l'aire A due à sa révolution autour du Soleil, l'axe de l'écliptique ne ferait qu'un angle très-petit avec l'axe fixe de notre plan invariable (G), et, par conséquent, s'en écarterait peu; mais il est certain qu'il tournerait autour de cet axe fixe exactement avec la même vitesse que l'axe de l'équateur.

On pourrait rendre encore bien plus sensible cette variation des nœuds du plan donné par les formules de Laplace. Supposons, par exemple, que le système soit formé de ces trois corps: le Soleil, la Terre et la Lune; et regardons même ces corps comme trois points massifs qui ne sont soumis qu'à leur action mutuelle. Par la théorie de Laplace, on trouverait que le plan invariable est le plan de l'orbite que le centre de gravité de la Terre et de la Lune décrit autour du Soleil; ce qui serait en-

core à très-peu près le plan de l'écliptique. Mais par notre théorie, où l'on tient compte, non-seulement de l'aire T due au commun mouvement de révolution de la Terre et de la Lune autour du Soleil, mais encore de l'aire O qui vient de la révolution particulière de ces deux corps dans le plan de l'orbe lunaire, il est certain que le *vrai plan invariable* serait celui de l'aire K qui résulte de la composition des deux aires T et O, plan qui passe nécessairement par la commune intersection des plans de ces deux aires composantes, et, par conséquent, par les nœuds de l'orbe lunaire sur le plan de Laplace. Si donc ce dernier plan était invariable, il faudrait conclure [ puisque le nôtre (K) l'est aussi ] que la ligne des nœuds est immobile dans l'espace. Or on sait que, par l'action moyenne du Soleil, les nœuds de l'orbe lunaire rétrogradent d'environ 20° par an. Donc le plan de Laplace doit se mouvoir avec celui de l'orbe lunaire, et de telle manière que leur commune intersection décrive notre plan fixe (K) par un mouvement angulaire d'environ 20° par an, ou d'une circonférence entière en dix-huit ans.

On pourrait donner beaucoup d'autres exemples : mais ce qu'on vient de dire suffit pour montrer de quel ordre peuvent être dans notre système planétaire les variations que le plan de Laplace doit éprouver à raison de ces aires qu'il a oublié de faire entrer dans son analyse. Le mouvement de ses nœuds sur le vrai plan invariable est précisément le même que celui des nœuds du plan de l'aire composée de toutes celles qu'il a oubliées dans son calcul. J'ai dit *oubliées*, et non pas *négligées;* parce que Laplace, qui, dans sa *Mécanique céleste*, néglige tant de quantités, n'oublie jamais d'en faire mention, et de dire pourquoi il les néglige. Dans la théorie même dont il s'agit, il néglige,

parmi les termes qui contiennent les produits deux à deux des masses des corps célestes, tous ceux où n'entre point la masse du Soleil, et il ne manque pas d'en donner une raison (que je n'examine point ici). Mais quant à ces aires nouvelles que j'ai le premier considérées, il n'en dit pas un seul mot : et pourtant il arrive que ces quantités, non-seulement sont bien plus grandes que celles qu'il néglige, mais encore surpassent de beaucoup plusieurs de celles qu'il conserve, telles que les aires décrites par Mercure, Vénus, Mars et la Terre autour du Soleil. J'ai donc dû supposer que ce grand géomètre avait oublié les aires qui viennent de la rotation des corps célestes sur eux-mêmes, et des révolutions particulières de leurs satellites : car ceux qui prétendent qu'il y a songé, mais qu'*il les a volontairement omises comme n'étant d'aucune influence dans cette théorie*, lui prêtent une faute, lorsque moi-même je n'ai parlé que d'un oubli.

---

# THÉORIE GÉNÉRALE

## DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES SYSTÈMES.

Le principe des *vitesses virtuelles* est connu depuis longtemps, aussi bien que la plupart des principes généraux de la Mécanique. Galilée observa le premier, dans les machines, cette fameuse propriété des vitesses virtuelles, c'est-à-dire cette relation si connue qui existe entre les forces appliquées et les vitesses que prendraient leurs points d'application si l'on venait à troubler infiniment peu l'équilibre de la machine. Jean Bernoulli vit toute l'étendue de ce principe, et l'énonça avec cette grande généralité qu'on lui donne aujourd'hui. Varignon et la plupart des géomètres prirent soin de le vérifier dans presque toutes les questions de la Statique; et quoiqu'on n'en eût point de démonstration générale, il fut universellement regardé comme une loi fondamentale de l'équilibre des systèmes.

Mais jusqu'à Lagrange, les géomètres s'étaient plus appliqués à démontrer ou à étendre les principes généraux de la science, qu'à en tirer une règle générale pour la solution des problèmes; ou plutôt ils ne s'étaient pas encore proposé ce grand problème, qui est à lui seul toute la Mécanique.

Ce fut alors une heureuse idée de partir sur-le-champ du principe des vitesses virtuelles comme d'un *axiome*, et, sans s'arrêter davantage à le considérer en lui-même, de ne songer qu'à en tirer une méthode uniforme de calcul pour former les équations de l'équilibre et du mouvement dans tous les systèmes possibles. On franchit par là toutes les difficultés de la Mécanique : évitant, pour ainsi dire, de faire la science elle-même, on la transforma en une question de calcul ; et cette transformation, l'objet et le résultat de la *Mécanique analytique*, parut comme un exemple frappant de la puissance de l'Analyse.

Cependant, comme dans cet Ouvrage on ne fut d'abord attentif qu'à considérer ce beau développement de la Mécanique qui semblait sortir tout entière d'une seule et même formule, on crut naturellement que la science était faite, et qu'il ne restait plus qu'à chercher la démonstration du principe des vitesses virtuelles. Mais cette recherche ramena toutes les difficultés qu'on avait franchies par le principe même. Cette loi si générale, où se mêlent des idées vagues et étrangères de mouvements infiniment petits et de perturbation d'équilibre, ne fit en quelque sorte que s'obscurcir à l'examen ; et le livre de Lagrange n'offrant plus alors rien de clair que la marche des calculs, on vit bien que les nuages n'avaient paru levés sur le cours de la Mécanique que parce qu'ils étaient, pour ainsi dire, rassemblés à l'origine même de cette science.

Une démonstration générale du principe des vitesses virtuelles devait au fond revenir à établir la Mécanique entière sur une autre base : car la démonstration d'une loi qui embrasse toute une science ne peut être autre

chose que la réduction de cette science à une autre loi aussi générale, mais évidente, ou du moins plus simple que la première, et qui partant la rende inutile. Ainsi, par cela même que le principe des vitesses virtuelles renferme toute la Mécanique, comme il a besoin d'une démonstration approfondie, il ne peut lui servir de base première. Chercher à le démontrer pour l'heureux usage qu'on en a fait, c'est chercher à s'en passer pour cet usage même, soit en trouvant quelque autre loi aussi féconde, mais plus claire, soit en fondant sur les principes ordinaires une théorie générale de l'équilibre, dont la propriété des vitesses virtuelles ne devient plus alors qu'un simple corollaire.

Ainsi, dans cet état où Lagrange avait porté la science, ce n'était point la démonstration du principe des vitesses virtuelles qu'il fallait chercher immédiatement. La *Mécanique analytique*, telle que l'auteur l'a conçue, est au fond ce qu'elle doit être; et la démonstration du principe des vitesses virtuelles n'y *manque* point, puisque, si l'on essayait de la mettre à la tête de ce livre d'une manière générale et bien développée, l'ouvrage se trouverait fait deux fois : je veux dire que cette démonstration comprendrait déjà toute la Mécanique. On doit donc considérer que Lagrange s'est placé tout d'un coup sur un des points élevés de la science, afin de découvrir quelque règle générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équations tous les problèmes de la Mécanique; et cet objet est parfaitement rempli. Mais, pour former la science elle-même, il faut élever une théorie qui domine également tous les points de vue d'où l'on peut l'envisager. Il faut aller directement, non pas au principe obscur des vitesses virtuelles, mais à cette règle claire qu'on

en a su tirer pour la solution des problèmes; et cette recherche directe, naturelle, la seule propre à satisfaire notre esprit, fait l'objet principal du Mémoire qu'on va lire.

## I.

### *Propriétés de l'équilibre communes à tous les systèmes libres.*

L'un des premiers éléments de la théorie générale de l'équilibre est cet axiome: que si des forces se font actuellement équilibre sur un système quelconque de figure variable, l'équilibre ne cessera point en supposant que le système soit rendu tout à coup invariable, ou vienne, pour ainsi dire, à se solidifier lui-même.

Les conditions de l'équilibre des corps *solides* doivent donc se retrouver dans l'équilibre de tous les systèmes possibles, et c'est pour cela qu'on peut les nommer les *propriétés générales* de l'équilibre.

On a présenté ces conditions de plusieurs manières; mais on peut remarquer qu'elles se réduisent à cette condition unique, *que les forces appliquées aux divers points du système soient décomposables, suivant les droites qui les joignent, en forces deux à deux égales et contraires.* C'est *la possibilité* de cette décomposition, qui exige les six équations ordinaires de l'équilibre, comme on le verra tout à l'heure.

D'abord le théorème est évident pour l'équilibre de deux forces; il faut que ces deux forces soient parfaitement égales et contraires.

Il est bien aisé d'*en conclure* que, pour trois forces, si l'on joint leurs points d'application par trois lignes droites, il faudra nécessairement, pour l'équilibre, que ces forces

soient décomposables en d'autres deux à deux égales et contraires dans ces trois lignes.

Actuellement, si l'on a un nombre quelconque de forces, que l'on prenne trois quelconques de leurs points d'application, les trois lignes qui les joignent, et toutes celles qui, partant des autres points, viendraient aboutir à ceux-là, on pourra se représenter ces trois premiers points comme les angles de la commune base de plusieurs pyramides triangulaires dont les autres points seraient les sommets.

Cela posé, on peut toujours commencer par décomposer les forces appliquées à ces sommets, chacune en trois autres, suivant les trois arêtes qui y aboutissent.

Ensuite, on est le maître de décomposer les trois forces, qui sont aux coins de la commune base, en forces qui soient égales et contraires aux premières, et en d'autres. Si l'on supprime les forces égales et contraires dans les arêtes, il ne reste plus que trois forces appliquées aux trois angles de la base. Mais, puisqu'il y a équilibre, ces forces restantes doivent être décomposables, suivant les trois côtés de cette base, en forces deux à deux égales et contraires.

Donc toutes les forces étaient décomposables, suivant les droites qui joignent leurs points d'application, en forces deux à deux égales et contraires dans chacune d'elles; et cette décomposition est déterminée lorsqu'elle ne se fait, comme on le suppose ici, que par $3h - 6$ distances mutuelles, $h$ étant le nombre total des points du système.

Lorsqu'on veut faire entrer dans le calcul non-seulement les quantités des forces appliquées, mais encore leurs inclinaisons mutuelles, on se donne, au lieu de

chaque force, ses trois composantes parallèles à trois axes connus. Alors, pour exprimer qu'en chaque point chaque force est décomposée en d'autres suivant les arêtes qui y aboutissent, il faut trois équations où ces dernières composantes sont les inconnues. Il faudrait donc en tout $3h$ équations pour les $h$ points du système. Mais si l'on veut que les composantes soient deux à deux égales et contraires dans les $3h - 6$ arêtes, elles ne formeront que $3h - 6$ inconnues. Donc, en les éliminant, il restera entre les forces données six équations de condition, pour que leur décomposition en forces égales et contraires soit possible, et, par conséquent, pour qu'il y ait équilibre. Ce sont les six équations connues : nous les avons données ailleurs par une autre métaphysique qui a de grands avantages; mais j'ai été bien aise d'en indiquer en passant cette démonstration nouvelle, parce qu'on y découvre un nouveau sens, et qu'ici ces équations ne sont pas obtenues séparément et par des considérations particulières, mais s'offrent à la fois toutes six comme l'expression d'une *seule* et unique condition, qui est LA POSSIBILITÉ *que les forces appliquées se décomposent en d'autres égales et contraires suivant les distances mutuelles des différents points.*

Cette décomposition est donc *nécessaire* dans l'équilibre de tous les systèmes possibles; et quand les distances mutuelles des points du système sont toutes invariables, *elle suffit*, de quelque façon qu'elle s'opère d'ailleurs, je veux dire quelle que soit la proportion des composantes dans les distances mutuelles successives.

Mais lorsque, aucune de ces lignes n'étant invariable à part, c'est simplement une fonction de leurs longueurs qui doit demeurer constante, alors la décomposition pré-

cédente (qui est toujours nécessaire) ne suffit plus pour assurer l'équilibre du système ; il faut encore qu'il règne d'une droite à l'autre, entre les valeurs des forces égales et contraires, une certaine proportion qui dépend de la nature de la fonction proposée. Or c'est précisément cette proportion qu'il s'agit de découvrir ici ; et c'est dans la manière générale de la déduire de la fonction proposée que consiste la loi fondamentale de l'équilibre des systèmes.

## II.

*D'un système où les points ne sont liés que par une seule équation entre leurs distances mutuelles.*

Ne considérons d'abord que quatre points, et leurs distances $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$ qui sont comme les arêtes d'une pyramide triangulaire dont ces points seraient les sommets.

Représentons par $f(m, n, p, q, r, s) = L = const.$ la fonction quelconque de ces distances qui doit demeurer constante, en sorte qu'on ait toujours cette équation, dans quelques positions respectives que puissent passer les divers points du système.

Cela posé, soient, s'il est possible, quatre forces qui tiennent ces quatre points en équilibre. Si on les conçoit décomposées, chacune en trois autres suivant les trois arêtes contiguës, il résulte de ce qu'on vient de dire, que les deux composantes qu'on trouvera dans chaque arête seront nécessairement égales et contraires, sans quoi il n'y aurait point équilibre, même en supposant toutes ces arêtes devenues roides.

Il ne reste donc qu'à trouver la proportion des composantes autour de chaque sommet de la pyramide.

Pour cela, je suppose que trois quelconques des points deviennent parfaitement fixes dans l'espace. L'équilibre n'est pas troublé ; mais, à cause de l'équation proposée, le quatrième n'a plus que la liberté de se mouvoir sur une certaine surface courbe, et il a entièrement cette liberté. Donc il est nécessaire que la force unique P qui le presse soit actuellement perpendiculaire à cette surface (*).

Or, $m$, $n$, $p$ étant les trois arêtes qui se terminent au point que l'on considère, la surface qu'il a la liberté de décrire quand les trois autres deviennent fixes, est donnée par l'équation

$$f(m, n, p, q, r, s) = const.$$

lorsqu'on y regarde $m$, $n$, $p$ comme seules variables

La normale à cette surface se trouve donc en prenant les trois *fonctions primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$ de la fonction proposée relativement aux trois lignes ou rayons $m$, $n$, $p$; portant sur eux trois longueurs respectives proportionnelles à ces fonctions *primes*, avec cette attention de les porter sur les rayons mêmes, pour les fonctions *primes* qui auront le même signe, et sur leurs prolongements, pour les fonctions qui auront le signe contraire : si l'on achève le rhomboïde, la diagonale donne la direction de la normale, comme cela se voit par la géométrie (**).

Donc, puisque la force appliquée au point que l'on

(*) *Voyez*, sur ce principe, la note 1.

(**) On trouvera plus loin la démonstration de ce théorème.

considère, doit agir suivant cette direction, ses trois composantes suivant les arêtes $m$, $n$, $p$ sont nécessairement proportionnelles aux trois fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$.

On verrait de même qu'au point où se terminent les trois arêtes $m$, $q$, $r$, les trois composantes de la force qui le sollicite sont proportionnelles aux trois fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(q)$, $f'(r)$; et ainsi de suite.

Donc les forces égales et contraires dans les six arêtes $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$ sont toutes proportionnelles aux six fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, $f'(s)$.

Donc il est démontré, en toute rigueur, que si quatre corps ou points sont liés entre eux par la condition qu'une fonction quelconque de leurs distances mutuelles demeure constante, ces corps ne peuvent être en équilibre, à moins qu'ils ne soient sollicités les uns vers les autres, suivant leurs distances mutuelles, par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée relativement à ces distances, ou, ce qui est la même chose, à moins qu'ils ne soient sollicités par quatre forces P, Q, R, S, qui puissent se décomposer en celles-là; et, comme cette condition détermine entièrement les forces, il s'ensuit que de telles forces se feront réellement équilibre; ou il faudrait dire que l'équilibre n'est pas possible sur le système, ce qui est inadmissible. Car imaginez, pour un moment, que trois de nos quatre points soient vraiment fixes; il est clair que le quatrième, qui ne pourrait plus alors se mouvoir que sur une surface déterminée, serait tenu en équilibre par une force quelconque normale à cette surface, et il est certain qu'en même temps les trois points fixes ressentiraient de certaines

pressions déterminées. Or, à présent, qu'on rende libres ces trois points fixes, mais qu'on les soutienne aussitôt par trois forces égales et contraires aux trois pressions qu'ils avaient à détruire, et l'équilibre ne sera pas troublé. Donc il existe quatre forces qui peuvent tenir en équilibre nos quatre points, quoiqu'ils ne soient liés entre eux que par une seule équation; et ces quatre forces sont précisément celles qu'on a trouvées plus haut.

On a considéré sous la fonction les six distances mutuelles $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, des quatre corps; mais le raisonnement serait le même si cette fonction ne renfermait qu'une partie quelconque de ces distances. Seulement on trouverait que les forces sont nulles le long des distances qui n'entrent pas dans la fonction.

Par exemple, que des trois distances $m$, $n$, $p$ du premier point aux trois autres, il n'entre que les deux premières $m$ et $n$ dans la fonction proposée; alors la surface que ce point peut décrire, quand les autres sont fixement arrêtés, est donnée par l'équation.... $f(m, n, q, \ldots) = const.$, en y regardant $m$ et $n$ comme seules variables. C'est une surface de révolution autour de la ligne qui joint les deux corps d'où partent les deux rayons vecteurs $m$ et $n$. La normale à cette surface est donc simplement la diagonale d'un parallélogramme construit sur deux lignes proportionnelles à $f'(m), f'(n)$, dont on aurait prolongé ces rayons vecteurs. La force qui doit agir suivant cette normale se décompose donc entièrement, suivant les distances $m$ et $n$, en deux autres proportionnelles $f'(m), f'(n)$, et ne donne point de composante suivant la distance $p$, qui n'entre point dans la fonction.

Si, des trois distances $m$, $n$, $p$ du premier point aux

autres, il n'y en avait qu'une seule $m$ sous la fonction, la surface qu'il pourrait décrire quand les autres sont fixes serait donnée par l'équation $f(m, q, r, \ldots) = const.$, en y regardant $m$ comme seule variable, ce qui équivaut à $m = const.$ C'est alors une sphère dont la ligne $m$ est le rayon, et, par conséquent, la normale. La force qui doit agir suivant cette ligne y reste donc tout entière, et ses deux composantes sont nulles suivant les distances $n$ et $p$ : d'où l'on voit qu'il ne peut y avoir aucune action *directe* entre les corps suivant leurs distances mutuelles que la fonction ne renferme pas.

Soient actuellement tant de points que l'on voudra, et

$$f(m, n, p, q, r, \ldots) = L = const.$$

une équation quelconque entre leurs distances mutuelles $m, n, p, q, r, \ldots$ ; et s'il y a dans cette équation plus de $3h - 6$ distances mutuelles, $h$ étant le nombre des points, qu'on élimine ces lignes superflues, ou qu'on les suppose éliminées au moyen des équations qui ont lieu d'elles-mêmes entre les lignes qui joignent des points deux à deux dans l'espace : on pourra se représenter, comme ci-dessus, toutes ces distances mutuelles comme les arêtes de pyramides triangulaires successives qui s'appuieraient toutes sur une même base.

Cela posé, soit le système tenu en équilibre par des forces P, Q, R, S,... respectivement appliquées à ses différents points.

D'abord toutes ces forces doivent être décomposables, suivant les lignes $m, n, p, q, r, \ldots$ en forces deux à deux égales et contraires, sans quoi il ne pourrait pas y avoir équilibre, comme on l'a démontré plus haut.

Cette décomposition supposée faite (et elle aura lieu

ici d'une manière déterminée), il ne s'agit plus, pour connaître les forces, que de trouver la proportion nécessaire de leurs composantes. Or je dis qu'elles sont entre elles comme les fonctions *primes* de la fonction proposée relativement aux lignes $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, ... où elles sont dirigées.

En effet, considérons à part quatre points qui forment les angles de l'une de nos pyramides, et supposons, pour un moment, que, leurs distances mutuelles restant seules variables dans l'équation, toutes les autres y deviennent constantes; il est clair que le jeu de ces quatre corps devient le même que s'ils étaient restés seuls dans l'espace, mais liés entre eux par l'équation proposée, où l'on regarderait leurs seules distances mutuelles comme variables, et toutes les autres lignes comme de simples nombres donnés. Cela résulte de la supposition même, et se voit aussi très-bien dans la figure, en se représentant les six arêtes de notre pyramide restées seules variables. D'abord, le point qui fait le sommet de cette pyramide ne tient point aux autres arêtes devenues invariables; et pour les trois points à la base, ils ne sont pas plus gênés par ces arêtes, qui descendent sur eux trois à trois, des autres points du système, que si elles n'y étaient réellement pas. Car, bien que ces lignes soient devenues isolément roides, comme on les suppose restées mobiles autour de leurs points d'intersection, qui eux-mêmes sont mobiles dans l'espace, il est visible qu'elles se prêtent d'elles-mêmes aux mouvements des trois points où elles aboutissent, et ne font que les suivre, sans les gêner, dans toutes les positions où ils peuvent passer quand on fait varier leurs seules distances mutuelles dans l'équation proposée.

Donc, en vertu de ce qui a été démontré, il faudrait, pour l'équilibre particulier du système de nos quatre points, qu'ils fussent sollicités les uns vers les autres par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée, prises relativement à leurs distances mutuelles.

Mais il est clair que cette proportion doit se retrouver absolument la même dans l'équilibre général du système; car si l'équilibre est supposé y exister, il y subsiste toujours en supposant telles arêtes que l'on voudra devenues roides, et supprimant alors toutes les forces égales et contraires qui se détruiraient d'elles-mêmes dans ces arêtes. Les forces restantes appliquées au système partiel le long des arêtes ou distances mutuelles restées variables, doivent donc suivre nécessairement la loi de l'équilibre de ce système.

Donc, au moment de l'équilibre général, on est sûr que les composantes contraires qu'on trouverait dans les arêtes de l'une quelconque de nos pyramides sont proportionnelles aux fonctions *primes* de la fonction donnée relativement à ces lignes. Donc, à cause des arêtes communes aux pyramides successives, cette proportion s'étend d'une arête à l'autre dans toute la figure du système; et tous les points sont nécessairement sollicités les uns vers les autres, suivant leurs distances mutuelles $m$, $n$, $p$, $q$, $r$,... qui entrent dans la fonction, par des forces proportionnelles aux fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, etc., de cette fonction, relativement à ces distances $m$, $n$, $p$, $q$, $r$,... *Ce qu'il fallait démontrer.*

Si donc, aux différents points du système, on prend sur les lignes $m$, $n$, $p$, $q$, $r$,... des longueurs quel-

conques toutes proportionnelles aux fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, etc., qui se rapportent à ces lignes, ces longueurs représenteront les composantes des forces qui doivent être appliquées à ces points respectifs; de sorte qu'en les réduisant en chaque point à une seule P, on aura la force unique qui doit y être appliquée pour l'équilibre du système.

La manière la plus simple de trouver l'expression de ces forces P, Q, R, ..., est de chercher, pour chacune d'elles P, ses trois composantes X, Y, Z, parallèles à trois rectangulaires dans l'espace.

Soient $x$, $y$, $z$ les trois coordonnées du premier point par rapport à ces axes; $m$, $n$, $p$, etc., ses distances aux autres points dont les coordonnées soient $x'$, $y'$, $z'$; $x''$, $y''$, $z''$; $x'''$, $y'''$, $z'''$, etc.; on aura

$$m = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$
$$n = \sqrt{(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2},$$
$$p = \sqrt{(x-x''')^2 + (y-y''')^2 + (z-z''')^2},$$
etc.;

et les fonctions *primes* de ces expressions, prises par rapport à $x$, et que nous représenterons par $\frac{dm}{dx}$, $\frac{dn}{dx}$, $\frac{dp}{dx}$, etc., seront les cosinus des angles que les droites font avec l'axe des $x$.

Les forces $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, etc., appliquées au point que l'on considère suivant ces droites, donneront donc, parallèlement à l'axe des $x$, les composantes respectives

$$f'(m)\frac{dm}{dx}, \quad f'(n)\frac{dn}{dx}, \quad f'(p)\frac{dp}{dx}, \text{ etc.},$$

lesquelles se réduiront à une seule X égale à leur somme,

$$f'(m)\frac{dm}{dx} + f'(n)\frac{dn}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx} + \text{etc.}:$$

or cette expression n'est autre chose que la fonction *prime* de la fonction proposée $f(m, n, p, q, r,)\ldots$, ou $L$, prise relativement à $x$, et que nous représenterons simplement par $\left(\frac{dL}{dx}\right)$.

Ainsi, la force appliquée au premier point aura sa composante X, suivant l'axe des $x$, représentée par $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, c'est-à-dire par la fonction *prime* de la fonction donnée $L$, relativement à la coordonnée du point le long de cet axe.

On aura de même pour les deux autres composantes Y, Z, suivant les axes des $y$, $z$, les expressions $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$; de sorte que la force elle-même P sera représentée par

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}.$$

Si l'on considère la surface courbe représentée par l'équation $L = const.$, quand on y regarde $x$, $y$, $z$ comme seules variables, on sait que $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$ sont proportionnelles aux cosinus des trois angles que fait avec les axes la normale à cette surface (*).

(*) Cette analyse contient la démonstration générale du théo-

La orce $P = \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$ est donc dirigée perpendiculairement à la surface courbe que le point où elle agit pourrait décrire si tous les autres devenaient fixes; ce qui doit être et ce qu'on pouvait supposer à priori, comme dans le cas du système de quatre points, où l'on est parti de cette vérité comme principe.

Donc, en appliquant ce qu'on vient de dire aux différents points du système, les forces P, Q, etc., qui les sollicitent, sont toutes proportionnelles aux fonctions

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$
$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2},$$
$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2},$$
etc.,

---

rème de géométrie dont on a parlé plus haut (p. 428). Il en résulte que les lignes $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, etc., étant composées à la manière des forces, donnent pour résultante la normale à la surface courbe décrite par le point où $m$, $n$, $p$, $q$, etc., aboutissent comme rayons vecteurs. C'est ce rapprochement curieux, entre la composition des forces et la détermination des normales, qui amène, en Mécanique, ces fonctions *primes* de la fonction donnée, comme l'expression naturelle des forces capables de se faire équilibre. Car il faut, en chaque point, que les forces appliquées soient proportionnelles à ces fonctions *primes*, afin de donner leur résultante dirigée suivant la normale à la surface que ce point peut décrire quand on arrête tous les autres; et c'est ensuite la nécessité de l'équilibre dans chaque partie du système qui fait passer cette proportion d'un point à l'autre dans toute l'étendue de la figure.

et chacune d'elles est normale à la surface courbe que son point d'application pourrait décrire, en vertu de l'équation $L = const.$, si l'on supposait tous les autres fixement arrêtés.

Cette démonstration nous paraît nette et rigoureuse; elle est même dégagée de cette espèce d'axiome, que, dans les systèmes, les points ne peuvent agir les uns sur les autres que suivant les droites qui les joignent. En effet, pour obtenir les forces totales qui doivent être appliquées aux points respectifs du système, nous sommes bien maîtres d'imaginer chacune d'elles comme décomposée en d'autres suivant telles lignes que nous voulons choisir, et qui, pour chaque point, sont au nombre de trois au moins; et puisque nous avons trouvé la proportion nécessaire de toutes ces composantes, il s'ensuit que nous avons trouvé les vraies forces de l'équilibre, et que cet équilibre est unique.

Cependant voici une difficulté apparente qu'il n'est peut-être pas inutile de proposer et de résoudre, parce que sa solution très-simple met le théorème dans un nouveau jour.

Quand le système n'est composé que de quatre points, il faut nécessairement leurs six distances mutuelles pour déterminer la pyramide dont ils sont les angles; et, par conséquent, il n'y a aucune équation de *condition*, c'est-à-dire qui existe d'elle-même entre ces distances.

Mais, lorsque le nombre des points est supérieur à quatre, il y a plus de distances mutuelles qu'il n'en faut pour assurer la figure du système; et l'on a, entre toutes les distances, autant d'équations de condition que de lignes superflues. On peut donc alors éliminer de la

fonction proposée $f(m, n, p, q, r, \ldots)$, ou y introduire telles de ces lignes qu'on voudra, et que toutefois la combinaison de ces équations pourra permettre. Ainsi, l'on pourra varier les distances qui entrent sous cette fonction, et la forme de cette fonction de plusieurs manières.

Or, suivant qu'on voudra présenter cette fonction entre telles ou telles distances mutuelles, on trouvera telles ou telles forces suivant ces distances, d'où il paraît que les forces totales P, Q, etc., qui en résulteraient à chaque point, pourraient bien n'être pas les mêmes dans ces différents cas, quoiqu'au fond la liaison des points n'ait pas été changée, et que le cas de l'équilibre soit unique.

Pour détruire sur-le-champ cette difficulté, j'observe que, si une fonction des distances mutuelles de plusieurs points peut quelquefois être écrite de plusieurs façons, selon les distances que l'on y veut choisir, cette fonction néanmoins reste toujours *identique*, si on la regarde comme une fonction des coordonnées $x$, $y$, $z$ de tous les points. En effet, les équations de condition qui ont lieu entre les distances mutuelles $m, n, p, q, r, \ldots$ ne sont autre chose que des identités, lorsqu'on vient à y substituer, au lieu de ces droites, leurs expressions par les coordonnées $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$, etc., des différents points qu'elles unissent. Ainsi, quoique au moyen de ces équations, la fonction proposée $L$ puisse être changée en $m$, $n$, $p$, $q$, $r, \ldots$, elle demeure toujours la même en $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$, etc.; les expressions

$$\left(\frac{dL}{dx}\right), \left(\frac{dL}{dy}\right), \left(\frac{dL}{dz}\right); \left(\frac{dL}{dx'}\right), \left(\frac{dL}{dy'}\right), \left(\frac{dL}{dz'}\right), \text{ etc.,}$$

sont donc aussi toujours les mêmes. Or, comme on sera toujours conduit à ces expressions pour les composantes X, Y, etc., de quelque manière permise que la même fonction $L$ ait été écrite en $m, n, p, q, r, \ldots$, il s'ensuit qu'on parviendra toujours aux mêmes forces P, Q, R, etc., pour l'équilibre du système, comme cela doit être.

Ceci nous fait voir encore que si la fonction proposée $L$, ou $f(m, n, p, q, r, \ldots)$ est présentée entre plus de lignes $m, n, p, q, r, \ldots$ qu'il n'en faut pour la figure, il sera inutile d'éliminer les autres, comme on l'a supposé fait, au commencement, pour la clarté de la démonstration. Les fonctions $\left(\frac{dL}{dx}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz}\right)$; $\left(\frac{dL}{dx'}\right)$, $\left(\frac{dL}{dy'}\right)$, $\left(\frac{dL}{dz'}\right)$, etc, qu'on en tirerait pour l'expression des forces de l'équilibre, seraient identiquement les mêmes que si l'on n'avait pas fait l'élimination; et, par conséquent, on les obtiendra tout de suite, sans rien changer à la forme sous laquelle la fonction est donnée.

A l'égard des *actions réciproques* des différents points, si l'on sait que, dans le système dont on s'occupe, il ne peut y avoir de communication directe entre les $h$ points que par leurs $3h - 6$ distances mutuelles qui entrent sous la fonction, on conclura de ce qui a été démontré, que ces points agiront réellement les uns sur les autres, suivant ces distances $m, n, p, q, r, \ldots$, en raison des fonctions *primes* $f'(m)$, $f'(n)$, $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, etc.

Mais, de même que la fonction proposée peut être présentée indifféremment entre telles ou telles dis-

tances mutuelles, de même la communication des points peut être établie suivant telles ou telles de ces lignes sans que la liaison générale de ces points soit changée. Si donc on ignore de quelle manière le système est exécuté, on ne pourra pas dire, d'après la seule fonction $f(m, n, p, q, \ldots)$, quelles sont les réactions véritables des différents points, parce qu'on ne saura pas si les liens qui pourraient donner lieu à ces actions directes sont établis précisément le long des distances mutuelles $m$, $n$, $p$, $q$, $r, \ldots$, qui paraissent dans la fonction. Ainsi, cette fonction qui, sous quelque forme qu'elle soit donnée, caractérise le système, et suffit pour faire connaître sur-le-champ les forces uniques P, Q, R, etc., ou

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2}, \text{ etc.},$$

qui doivent être appliquées aux différents points, ne suffit pas pour apprendre comment ces forces se distribuent réellement des uns aux autres : il faut encore regarder la construction du système lui-même, et voir suivant quelles distances mutuelles la communication est réellement établie. S'il arrive qu'elle se fasse précisément par les mêmes distances que celles qui sont dans la fonction donnée, on prendra sur-le-champ les fonctions *primes* relatives à ces distances, et l'on aura les réactions véritables des différents points. Mais si la communication s'opère par d'autres lignes, il faudra commencer par éliminer de la fonction toutes les distances mutuelles le long desquelles il n'y a pas de lien immédiat dans la construction du système (ce

qui pourra toujours se faire au moyen des équations de condition entre ces droites), et les fonctions *primes* de cette fonction nouvelle par rapport aux distances mutuelles qui y restent seront les expressions des actions réciproques qui auront véritablement lieu entre les corps.

Tel est l'esprit de cette loi fondamentale qui contient toute la science des forces. Avant d'aller plus loin, il me paraît à propos d'en faire quelques applications simples, où l'on voie à la fois la rapidité des solutions et l'identité de la théorie avec les premiers principes de l'équilibre.

Considérons d'abord trois points liés entre eux par la condition que la somme de leurs distances mutuelles $m$, $n$, $p$ doive demeurer constante.

La fonction $f(m, n, p)$ sera donc ici $m+n+p$; en prenant les fonctions *primes*, on aura

$$f'(m) = 1, \quad f'(n) = 1, \quad f'(p) = 1.$$

Ce qui nous apprend que chacun des trois points doit être sollicité vers les deux autres par des forces égales; que, par conséquent, les trois forces, P, Q, R, qu'il faut appliquer à ces points, sont représentées en grandeurs et en directions par les diagonales de trois losanges construits avec les mêmes côtés sous les trois angles du triangle.

C'est la loi de l'équilibre de trois points où passeraient, comme dans des anneaux, un même fil inextensible le long duquel ils pourraient couler librement. Quand ces points se meuvent de manière que le fil reste tendu, la somme de leurs distances mutuelles demeure constante, conformément à l'équation $m+n+p = const.$; et chacun d'eux, lorsqu'on le

suppose seul mobile, n'a plus que la liberté de se mouvoir sur un ellipsoïde de révolution dont les deux autres sont les foyers. C'est pour cela que chacune des forces appliquées divise en deux parties égales l'angle formé par les distances de son point d'application aux deux autres; car cette force doit être normale à l'ellipsoïde dont il s'agit, et dans cette surface la normale divise en deux parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs.

On peut remarquer que le fil inextensible ne représente pas complétement la liaison que l'équation suppose; car ce fil fait simplement que la somme des distances des points ne peut pas devenir plus grande, mais il ne l'empêche pas de devenir moindre. Ainsi, pour l'équilibre des trois corps unis par le fil, il faut encore ajouter que les forces doivent agir de manière à ce que le fil soit tendu; au lieu que, dans l'équilibre du système défini par l'équation $m + n + p = const.$, elles peuvent agir indifféremment, ou pour tendre le fil, ou pour le comprimer: de sorte que l'espèce de fil flexible que le calcul suppose est tout à la fois inextensible et incontractile.

Si c'était simplement la somme des distances $m$ et $n$ des deux premiers corps au troisième qui dût demeurer constante, on aurait

$$f(m, n) = m + n = const.,$$

d'où $f'(m) = f'(n) = 1$. Ainsi, il faudrait appliquer aux deux premiers corps deux forces égales, suivant leurs distances $m$ et $n$, au troisième; et à celui-ci, une force égale et contraire à leur résultante; et il n'y aurait point de force suivant la distance $p$, qui n'entre pas sous la fonction.

C'est, en effet, le cas de trois corps dont l'un pourrait couler comme un anneau le long du fil, tandis que les deux autres seraient fixement attachés à ses deux bouts. Quand les deux corps extrêmes sont supposés fixes, celui du milieu n'a plus que la liberté de décrire un ellipsoïde de révolution autour d'eux comme foyers; mais ceux-ci décrivent simplement des sphères autour de lui, comme centre, quand ils sont regardés, l'un après l'autre, comme seuls mobiles. Voilà pourquoi la force appliquée au corps qui peut glisser le long du fil divise en deux également l'angle formé par les deux portions de ce fil, tandis que chacune des deux autres forces agit vers le corps du milieu, dans la direction du fil lui-même.

S'il y avait plus de trois corps unis entre eux par un même fil, le long duquel ils pussent couler librement, en nommant $m$, $n$, $p$, $q$, $r$,... les portions successives de ce fil, on aurait

$$f(m, n, p, q, r, \ldots) = m + n + p + q + r + \ldots = const.,$$

et, par conséquent,

$$f'(m) = f'(n) = f'(p) = f'(q) = f'(r) = \text{etc.} = 1,$$

comme ci-dessus : d'où l'on voit que le fil doit être également tendu dans toute sa longueur; que chacune des forces divise en deux parties égales l'angle du polygone funiculaire où elle est appliquée, et qu'elles sont toutes proportionnelles aux cosinus des moitiés de ces angles; etc.

Supposons actuellement que nos trois corps soient tellement liés, que la somme des carrés de leurs distances mutuelles reste constante.

La fonction $f(m, n, p)$ sera ici $m^2 + n^2 + p^2$; et l'on aura

$$f'(m) = 2m, \quad f'(n) = 2n, \quad f'(p) = 2p.$$

Il faudra donc, pour l'équilibre, que chaque corps soit sollicité vers les deux autres par des forces proportionnelles à ses distances à ces deux corps; d'où il est facile de voir que les trois forces uniques P, Q, R, qui agiraient sur ces points respectifs, sont dirigées vers leur centre de gravité, en les supposant de masses égales, et sont proportionnelles à leurs distances à ce centre.

C'est, en effet, ce qui résulterait du plus simple raisonnement; car, en vertu de l'équation..... $m^2 + n^2 + p^2 = const.$, si l'on suppose deux des points devenus fixes, le troisième n'a plus que la liberté de décrire une sphère dont le centre est au milieu de la droite qui joint les deux autres: or la force qui le sollicite, dans le cas de l'équilibre, doit être normale à cette surface, et, par conséquent, les trois forces doivent être dirigées des trois angles du triangle vers les milieux des côtés opposés, et se croiser ainsi au centre de gravité de ce triangle; il est clair ensuite qu'elles sont entre elles comme les distances des angles à ce point.

Mais ici on ne peut plus construire le système comme on l'a fait dans l'exemple précédent; il faudrait un fil d'une espèce particulière, où les corps pussent rouler de manière que la somme des carrés de leurs distances fût toujours la même, et nous ne connaissons pas de fil qui ait cette propriété. Mais, de quelque façon qu'un pareil système puisse être exé-

cuté, qu'il soit même possible ou non, peu importe à la théorie; notre objet n'est pas de le faire, mais de trouver les forces d'équilibre qui résultent nécessairement de sa définition, et le problème est résolu dans toute sa pureté.

Que si l'on avait un plus grand nombre de corps liés de manière que la somme des carrés de toutes leurs distances mutuelles dût demeurer constante, on verrait de même que, pour l'équilibre, tous ces corps doivent être sollicités les uns vers les autres proportionnellement à leurs distances; de sorte que les forces totales qui les animent respectivement sont dirigées vers le centre de gravité de tous ces points, considérés comme égaux en masse, et sont proportionnelles aux distances de ces points à ce commun centre.

Si la fonction des distances mutuelles était..... $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\ldots$, en prenant les fonctions *primes*, on aurait

$$f'(m)=-\frac{1}{m^2},\quad f'(n)=-\frac{1}{n^2},$$

$$f'(p)=-\frac{1}{p^2},\quad f'(q)=-\frac{1}{q^2},\text{ etc.};$$

et tous les corps, dans le cas de l'équilibre, devraient être sollicités les uns vers les autres en raison inverse des carrés de leurs distances mutuelles, etc., etc.

On pourrait multiplier les exemples; mais ceux-ci suffisent, et je reviens à la question générale.

## III.

*D'un système où les points sont liés par plusieurs équations quelconques entre leurs distances mutuelles.*

Supposons actuellement que les points du système soient tellement liés qu'on ait toujours entre leurs distances mutuelles les équations suivantes :

$$f(m, n, p, q, r, \ldots) = L = const.,$$
$$\varphi(m, n, p, q, r, \ldots) = M = const.,$$
$$\psi(m, n, p, q, r, \ldots) = N = const.,$$
etc.,

de sorte que le système puisse affecter toutes les figures où ces équations subsistent, et n'en puisse affecter aucune où elles cesseraient d'avoir lieu.

Premièrement, par cela seul que les points du système sont liés entre eux par la première équation $L = const.$, on peut leur appliquer les forces respectives

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$
$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2},$$
$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2},$$
etc.;

$\lambda$ désignant un coefficient quelconque indéterminé, et chaque force étant normale à la surface représentée par l'équation $L = const.$, lorsqu'on y regarde les trois coordonnées du point d'application comme seules variables; et l'on est sûr que ces forces se font équilibre sur le système.

En second lieu, parce que les points sont liés entre eux par la seconde équation $M = const.$, on peut leur appliquer encore les forces respectives

$$\mu\sqrt{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right)^2},$$
$$\mu\sqrt{\left(\frac{dM}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz'}\right)^2},$$
$$\mu\sqrt{\left(\frac{dM}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz''}\right)^2},$$
etc.;

$\mu$ étant un nouveau coefficient indéterminé, et chacune de ces forces étant normale à la surface représentée par l'équation $M = const.$, lorsqu'on y regarde les coordonnées du point d'application comme seules variables.

De même, en désignant par $\nu$ un coefficient indéterminé comme les précédents, on peut encore appliquer aux points du système les forces respectives

$$\nu\sqrt{\left(\frac{dN}{dx}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz}\right)^2},$$
$$\nu\sqrt{\left(\frac{dN}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy'}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz'}\right)^2},$$
$$\nu\sqrt{\left(\frac{dN}{dx''}\right)^2+\left(\frac{dN}{dy''}\right)^2+\left(\frac{dN}{dz''}\right)^2},$$
etc.,

dirigées suivant les normales aux surfaces respectives représentées par l'équation $N = const.$, lorsqu'on y regarde successivement, etc.

Et ainsi de suite pour les autres équations qui lient les points du système.

Il est bien manifeste qu'il y aura équilibre en vertu de toutes ces forces, puisqu'il y aurait équilibre en particulier dans chaque groupe relatif à chaque équation.

Mais on pourrait demander si ces forces, ou leurs résultantes aux différents points, sont les seules qui puissent se faire équilibre sur le système; si, par la simultanéité des équations $L = const.$, $M = const.$, $N = const.$, etc., les points ne pourraient pas devenir capables d'autres résistances que des résistances composées de celles qui naîtraient successivement de ces équations, si elles avaient lieu l'une après l'autre.

Pour répondre à cette question, j'observe qu'au moment de l'équilibre du système, chaque équation peut être regardée comme tenant lieu de certaines forces : car si l'on venait à supprimer tout à coup cette équation, l'équilibre serait rompu; mais il est clair qu'il y aurait de certaines forces propres à empêcher cette rupture, et qui remplaceraient parfaitement l'équation absente. Si donc on imagine que toutes les équations, hors la première, soient actuellement remplacées par des forces convenables, les points ne se trouvant plus liés entre eux que par la seule équation $L = const.$, il est nécessaire que toutes les forces appliquées soient réductibles à des forces proportionnelles aux fonctions

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz'}\right)^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dL}{dx''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy''}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz''}\right)^2},$$

etc.;

d'où l'on voit que cette équation, dans l'équilibre du système, ne peut tenir lieu que des mêmes forces dont elle pourrait tenir lieu si elle était seule. Ainsi, les forces qui peuvent se faire équilibre sur un système défini par plusieurs équations ne sont autre chose que les forces composées de celles qui s'y feraient équilibre séparément en vertu de chaque équation (*).

Lorsque les points du système ne sont liés que par une seule équation, le cas de l'équilibre est unique; je veux dire qu'il n'y a, pour chaque figure où peut passer le système, que des forces P, Q, R, etc., de directions et de proportions déterminées, qui puissent s'y faire équilibre. Mais lorsqu'il y a deux équations $L = const.$, $M = const.$, l'équilibre n'est plus unique; et il y a pour une même figure une infinité de groupes de forces qui peuvent se faire équilibre sur le système. En effet, au moyen des deux indéterminées $\lambda$ et $\mu$ qui affectent les deux composantes

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

$$\mu\sqrt{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right)^2},$$

de chaque force, on peut varier les directions et la proportion de ces forces d'une infinité de manières. Seulement il faut observer que chacune d'elles ne sortira pas d'un plan déterminé : car la première composante est normale à la surface représentée par l'équation $L = const.$, lorsqu'on y regarde les coordonnées du point comme seules variables; la seconde est normale à la surface

(*) *Voir*, sur ce point, la Note II.

représentée par l'équation $M = const.$, lorsqu'on y regarde les mêmes coordonnées comme seules variables. La résultante est donc située dans le plan perpendiculaire à l'intersection de ces deux surfaces. C'est, en effet, ce qui doit avoir lieu; car, si l'on vient à fixer tous les points du système, hors celui dont il s'agit, il n'aura plus que la liberté de se mouvoir le long de cette intersection, comme dans un canal infiniment étroit : or, l'équilibre n'étant point troublé par l'hypothèse, il faut nécessairement que la force appliquée soit actuellement perpendiculaire à la direction de ce canal.

Quand il y a plus de deux équations qui lient les points du système, l'indétermination du cas de l'équilibre est encore plus étendue; et, pour les points dont les coordonnées se trouvent à la fois dans trois équations, les forces appliquées peuvent avoir des directions quelconques. Les trois indéterminées $\lambda$, $\mu$, $\nu$, qui affectent alors les trois composantes de chaque force, peuvent donner à cette force une direction arbitraire dans l'espace. C'est ce qui s'accorde encore avec notre principe; car si l'on suppose devenus fixes tous les points hors celui que je considère, comme ses coordonnées entrent à la fois dans trois équations, ce point ne conserve plus aucune liberté dans l'espace; ainsi, la force qui le sollicite n'est obligée à aucune direction déterminée (*).

---

(*) Au reste, il faut bien entendre ceci : les directions des forces ne sont pas toutes indéterminées; s'il n'y avait, par exemple, que trois équations, une fois que l'on aurait disposé de $\lambda$, $\mu$, $\nu$ pour donner à l'une des forces une direction arbitraire, les directions et la proportion des autres seraient nécessairement déterminées.

## IV.

### *D'un système où les points sont liés par des équations* quelconques *entre leurs coordonnées.*

Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'un système entièrement *libre*, c'est-à-dire dont les points ne se trouvent liés que par des équations entre *leurs distances mutuelles;* mais il est bien facile d'étendre la loi que nous avons trouvée à un système où les points seraient liés par des équations entre *leurs coordonnées relatives à trois axes fixes dans l'espace.* Ce n'est pas que les fonctions $L$, $M$, $N$, etc., des distances mutuelles $m$, $n$, $p$, $q$, etc., ne puissent être regardées comme fonctions des coordonnées $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$, etc., au moyen des expressions $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, etc., qu'on y substituerait à la place des lignes $m$, etc.; mais elles ne contiennent alors ces coordonnées $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$, etc., que d'une certaine manière, et nous voulons passer au cas où elles en seraient des fonctions *quelconques.*

Pour cela, reprenons notre système libre de l'article précédent, et, choisissant à volonté trois points de ce système, menons de chacun des autres trois lignes à ces points, et supposons, ce dont on est toujours le maître, que, dans les équations $L = const.$, $M = const.$, $N = const.$, etc., il n'entre que ces distances et celles qui joignent nos trois points deux à deux.

Si l'on suppose alors que ces trois points deviennent fixes, les forces de l'équilibre n'en sont pas moins exprimées par les mêmes fonctions qu'auparavant; seulement les trois points devenus fixes supporteront des pressions égales et contraires aux forces qu'il aurait fallu

y appliquer s'ils étaient restés libres avec les autres. Actuellement, faisons abstraction de ces trois points, c'est-à-dire regardons les autres comme formant à eux seuls un système qui est celui que nous avons en vue. Les équations entre leurs distances aux trois points fixes deviendront des équations quelconques entre les coordonnées qui déterminent leurs lieux dans l'espace : cependant les forces de l'équilibre seront exprimées comme auparavant. Ces forces, il est vrai, ne se feront plus équilibre entre elles *seules*, comme dans le cas du système libre, où nous les avons vues se décomposer en forces, deux à deux égales, et contraires, suivant les droites qui joignent les points; et même il pourra souvent arriver qu'il n'y ait aucune action directe entre ces mêmes points. Mais, pour concevoir alors comment l'équilibre s'opère, il faudra supposer qu'on restitue ces trois points fixes avec lesquels les premiers sont en liaison tacite; et c'est par ces points, comme par des espèces de poulies de renvoi, que ceux du système réagiront les uns sur les autres, et entretiendront la loi de leurs résistances respectives de la même manière que si tout était libre dans l'espace.

Voilà précisément ce qui arrive quand on considère un système dont les points sont liés par des équations *quelconques* entre leurs coordonnées. On ne voit actuellement que les points dont les coordonnées paraissent dans ces équations, et l'on ne peut plus expliquer l'équilibre entre ces seuls corps : c'est qu'en se donnant une équation quelconque entre les coordonnées de plusieurs points, on introduit tacitement des objets fixes extérieurs, auxquels les points se trouvent liés, et souvent par lesquels seuls ils peuvent

se communiquer leur action réciproque. Mais si l'on imagine alors qu'on ait pris trois points quelconques dans l'espace, et qu'on ait changé les coordonnées primitives en d'autres qui soient, pour chaque point, ses distances à ces trois foyers, en ajoutant ces trois points au système, et considérant le tout comme libre, on trouvera pour les forces la même expression que nous avons donnée plus haut; et si l'on ne veut plus compter ensuite les trois forces appliquées aux trois foyers, parce qu'en les supposant fixes, ils n'ont pas besoin d'être retenus par des forces actuelles, et qu'ils trouvent en eux-mêmes les résistances nécessaires pour l'équilibre, on n'aura égard, comme on le fait ordinairement, qu'à celles des points du système proposé, lesquelles auront entre elles les mêmes relations qu'auparavant, et se déduiront immédiatement des équations données, sans leur faire subir aucune transformation.

Et de là résulte enfin ce théorème, qui est l'objet principal du Mémoire :

*Quelles que soient les équations* $L = 0$, etc., *qui règnent entre les coordonnées des différents points d'un système, chacune d'elles, pour l'équilibre, demande qu'on applique à ces points, le long de leurs coordonnées, des forces quelconques proportionnelles aux fonctions primes de cette fonction* $L$, *relativement à ces coordonnées respectives.*

Ainsi, en représentant par $L = 0$, $M = 0$, etc., des équations quelconques entre les coordonnées $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$, etc., des différents points, et par $\lambda$, $\mu$, etc., des coefficients quelconques indéterminés, on aura, pour les forces totales, $X$, $Y$, $Z$; $X'$, $Y'$, $Z'$, etc., qui doivent être appliquées à ces points suivant leurs coor-

données :

$$\left.\begin{aligned}
X &= \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx}\right) + \text{etc.},\\
Y &= \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy}\right) + \text{etc.},\\
Z &= \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz}\right) + \text{etc.},\\
X' &= \lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx'}\right) + \text{etc.},\\
Y' &= \lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy'}\right) + \text{etc.},\\
Z' &= \lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz'}\right) + \text{etc.},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\ (A)$$

Si l'on élimine de ces équations les indéterminées $\lambda$, $\mu$, etc., il restera les conditions de l'équilibre proprement dites, c'est-à-dire les relations qui doivent avoir lieu entre les seules forces appliquées et les coordonnées de leurs points d'application pour l'équilibre du système.

Les équations (A) sont en même nombre que les coordonnées de tous les points, et les indéterminées $\lambda$, $\mu$, etc., en même nombre que les équations de condition $L = 0$, $M = 0$, etc. Le nombre des conditions de l'équilibre est donc égal à celui de toutes les coordonnées, moins le nombre des équations qui les lient; par conséquent, les conditions de l'équilibre diminuent à mesure que celles de la liaison augmentent. Mais comme, pour un système entièrement libre et dont le nombre de points est $h$, il ne pourrait pas y avoir plus de $3h - 6$ équations de condition, auquel cas la figure serait entièrement déterminée, il s'ensuit que, pour l'équilibre d'un tel système, il reste toujours six conditions nécessaires, comme nous le savions d'ailleurs.

En général, on voit que les équations de l'équilibre, réunies aux équations de condition, suffiront pour résoudre tous les problèmes qu'on pourra se proposer sur l'équilibre du système. Par exemple, on peut se donner les forces appliquées X, Y, Z; X′, Y′, Z′, etc., et demander la figure que doit prendre le système pour se mettre en équilibre en vertu de ces forces. Dans ce cas, les équations réunies dont je viens de parler, et dont le nombre est égal à celui de toutes les coordonnées, serviront à les faire connaître, et, par conséquent, les lieux des différents corps dans l'espace. Mais si l'on se donnait la figure du système, c'est-à-dire les coordonnées de tous les points, et qu'on demandât les forces capables de faire prendre au système cette figure, comme les forces X, Y, Z; X′, Y′, Z′, etc., qui seraient alors les inconnues, ne se trouvent que dans les équations de l'équilibre, et n'entrent point dans les équations de condition, on aurait moins d'équations que d'inconnues, et le problème demeurerait indéterminé: d'où l'on voit que, pour une même figure du système, il y a une infinité de groupes de forces capables de s'y faire équilibre; ce qui s'accorde encore avec ce que nous avons trouvé précédemment; etc., etc.

Mais je passe à la conclusion générale, où l'on rappelle sous un même point de vue le problème de l'équilibre et celui du mouvement.

## V.

### *Conclusion de ce Mémoire.*

Les lois de l'équilibre et du mouvement d'un point libre sont connues et parfaitement démontrées; mais, s'il

y a plusieurs points liés entre eux par des conditions quelconques, quelles seront les lois de l'équilibre et du mouvement de tout le système? Voilà le problème général de la Mécanique.

Or l'idée la plus naturelle dans cette recherche est de considérer que, si tout le système est actuellement en équilibre, chaque point doit être en équilibre de lui-même, en vertu des forces qui lui sont immédiatement appliquées, et des résistances qu'il éprouve de la part des autres, à cause de sa liaison avec eux. Et de même, quand le système entre en mouvement, chaque point doit se mouvoir comme s'il était libre, et qu'il obéit aux forces qui le sollicitent et aux forces de résistance dont nous venons de parler. Si donc on savait évaluer ces résistances mutuelles, on n'aurait qu'à les combiner avec les forces immédiatement données par l'état de la question, et, posant les équations de l'équilibre ou du mouvement pour chaque point, comme s'il était parfaitement libre, on aurait tout ce qui serait nécessaire pour déterminer l'état du système dans l'espace, et le problème serait résolu.

*Toute la Mécanique se réduit donc à savoir estimer les résistances réciproques que peuvent se prêter les différents points d'un système, en vertu des conditions qui les lient.*

Mais, pour donner là-dessus une règle *générale*, il faut nécessairement concevoir ces conditions exprimées sous une forme *générale*. Il faut commencer par établir une définition générale des *systèmes;* sans quoi la Mécanique ne serait plus que l'énumération des cas particuliers d'équilibre et de mouvement que l'on saurait résoudre, et il n'y aurait pas plus lieu de s'en propo-

ser le problème général, que, dans la Géométrie, de chercher une règle générale des tangentes, si l'on ne supposait avant tout les courbes définies par leurs équations.

Or, en supposant que les conditions qui lient entre eux plusieurs corps, et qui en font un *système*, consistent en ce que, dans toutes les positions où peuvent passer ces corps, il y ait des fonctions quelconques de leurs coordonnées qui doivent toujours demeurer nulles ou constantes, nous avons démontré qu'en vertu de chacune d'elles, les corps sont rendus capables, suivant leurs coordonnées, de résistances simultanées proportionnelles aux fonctions primes de cette fonction, relativement à ces coordonnées respectives.

On n'aura donc, pour résoudre les problèmes, qu'à prendre les résistances mutuelles des corps, d'après cette règle générale; à combiner ces forces avec celles qui leur sont immédiatement appliquées, et à traiter séparément chacun d'eux comme s'il était libre.

Ainsi, des équations précédentes (A), les trois premières peuvent être regardées comme les équations de l'équilibre du premier point, qui serait libre, mais sollicité à la fois par les forces appliquées X, Y, Z, et par les forces contraires

$$\left[\lambda\left(\frac{dL}{dx}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dx}\right)+\text{etc.}\right],$$
$$\left[\lambda\left(\frac{dL}{dy}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dy}\right)+\text{etc.}\right],$$
$$\left[\lambda\left(\frac{dL}{dz}\right)+\mu\left(\frac{dM}{dz}\right)+\text{etc.}\right],$$

qui naissent des équations $L=0$, $M=0$, etc.

De même les trois équations suivantes peuvent être considérées comme, etc. ; et ainsi des autres.

Quant aux équations du mouvement, on les formera en égalant l'expression générale $\frac{d^2x}{dt^2}$ de la force accélératrice suivant chaque coordonnée $x$, à la force appliquée X, combinée avec la résistance suivant cette même coordonnée ; et l'on aura, pour le premier point,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\left(\frac{dL}{dx}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx}\right) + \text{etc.},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\left(\frac{dL}{dy}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy}\right) + \text{etc.},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\left(\frac{dL}{dz}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz}\right) + \text{etc.};$$

et de même, pour le second point,

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + \lambda\left(\frac{dL}{dx'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dx'}\right) + \text{etc.},$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' + \lambda\left(\frac{dL}{dy'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dy'}\right) + \text{etc.},$$
$$\frac{d^2z'}{dt^2} = Z' + \lambda\left(\frac{dL}{dz'}\right) + \mu\left(\frac{dM}{dz'}\right) + \text{etc.};$$

et ainsi de suite pour les autres points du système.

Telles sont les équations générales du mouvement, d'où il s'agira de tirer, par le calcul intégral, la solution des problèmes qu'on pourra se proposer sur le mouvement du système.

De la loi de l'équilibre établie ci-dessus, nous aurions bien pu conclure que si l'on trouble infiniment peu l'équilibre d'un système quelconque de corps, de manière que les conditions de la liaison ne soient pas violées, la somme des *moments* de toutes les forces

appliquées, c'est-à-dire, suivant l'acception de Galilée, la somme de leurs produits par les chemins respectifs que parcourent leurs points d'application dans le sens de ces forces, doit toujours être égale à zéro; ce qui constitue le principe des *vitesses virtuelles*. Mais ce principe n'est plus alors qu'un simple corollaire de la théorie précédente, lequel, pour la solution des problèmes, n'aurait d'autre avantage que de nous ramener à la règle générale d'où nous l'aurions tiré lui-même, et ne se ferait même bien entendre que par cette règle.

On voit encore qu'il a été inutile de rappeler le fameux principe de d'Alembert, qui réduit la Dynamique à la Statique. En vertu de ce principe, si l'on décompose chaque mouvement imprimé en deux autres, dont le premier soit celui que le corps prendra réellement, tous les seconds doivent se faire équilibre entre eux; c'est-à-dire que si l'on décompose chaque mouvement imprimé, en deux, dont l'un soit celui que le corps perd, l'autre sera celui qu'il prendra. Mais cela revient immédiatement à ce qu'on vient de dire, savoir, que le mouvement réel de chaque point est le résultat de son mouvement imprimé, et de la résistance qu'il éprouve par sa liaison avec les autres; ce qui est évident de soi-même. Ainsi, le principe de d'Alembert n'est, au fond, que cette idée simple, qu'on remarque à peine dans la suite du raisonnement, et qui ne revêt la forme d'un principe que par un certain tour d'expression qu'on lui donne.

Cependant, comme on a vu que, pour avoir le mouvement de chaque point, il faut connaître la résistance qu'il peut éprouver de la part des autres, et que, d'un autre côté, ces résistances mutuelles ne sont autre chose que des forces qui se font équilibre à chaque instant sur

le système, dans les figures successives où il passe, il en résulte non-seulement que les lois du mouvement peuvent être ramenées à celles de l'équilibre, comme on le savait déjà par le principe de d'Alembert, mais encore qu'elles doivent y revenir nécessairement d'elles-mêmes; que dans l'étude ordonnée des diverses parties de la Mécanique, on ne peut pas traiter l'équilibre comme un cas particulier du mouvement, et qu'il est dans la nature des choses que la Dynamique soit fondée sur la Statique.

---

# NOTE I.

*Sur ce principe, que, dans l'équilibre des systèmes, chaque force doit être perpendiculaire à la surface ou à la courbe sur laquelle le point d'application n'aurait plus que la liberté de se mouvoir, si tous les autres points devenaient fixes.*

---

Ce principe peut être regardé comme un élément de la théorie générale de l'équilibre; il est clair, parfaitement exact, et la vérité en est hors d'atteinte. En effet, on démontre que, si un point n'a d'autre liberté dans l'espace que celle de se mouvoir sur une surface ou sur une ligne courbe fixement arrêtée, il n'y peut être en équilibre, à moins que la résultante des forces qui le sollicitent ne soit perpendiculaire à cette surface ou à cette ligne courbe.

Or, soit un système quelconque de points en équilibre en vertu d'autant de forces appliquées, de sorte qu'il n'y ait qu'une seule force pour chaque point. L'équilibre ne sera pas troublé si l'on fixe tous les points, hors un seul, et qu'on supprime ensuite toutes les forces appliquées aux points devenus fixes. Il ne restera donc à considérer qu'un seul point et la force unique qui le sollicite. Mais si, par la nature du système, quand on fixe tous les points hors un seul, celui-ci ne conserve plus que la liberté de se mouvoir sur une certaine surface ou sur une courbe, il est précisément dans le même cas

que s'il y eût été placé d'abord comme sur un objet fixement arrêté; et puisqu'il y est en équilibre, il faut que la force *unique* qui le sollicite soit perpendiculaire à cette surface, ou à cette ligne courbe.

Mais on voit que, pour la rigueur de la démonstration, il faut entendre simplement la surface, ou la courbe que le point pourrait décrire dans le cas où l'on fixerait tous les autres points du système, sans exception : car, si l'on ne fixait qu'une partie des autres points, il ne serait plus permis de supprimer, comme on l'a fait, toutes les autres forces du système, et de ramener ainsi la question au cas où il n'y a plus qu'un seul point et une seule force à considérer. Je vais éclaircir ceci par un exemple.

Dans le système formé de trois points A, B, C, liés entre eux de manière à ne pouvoir changer leurs distances mutuelles, en considérant le point A par exemple, si l'on ne supposait devenu fixe qu'un seul des deux autres, comme le point C, on verrait que le point A n'a plus que la liberté de décrire une sphère autour du point C comme centre : d'où il paraîtrait s'ensuivre que, pour l'équilibre, la force appliquée en A doit être normale à cette sphère, et, par conséquent, dirigée vers le point C; ce qui n'est pas nécessaire.

Mais si l'on suppose rendus fixes à la fois les deux points B et C, le point A n'a plus que la liberté de décrire un arc de cercle autour de la droite BC, comme axe de révolution; et l'on peut ici rigoureusement conclure que la force appliquée doit être perpendiculaire à la direction de cet arc de cercle, condition qui n'oblige la force qu'à se trouver située, d'une manière quelconque, dans le plan des trois points A, B, C, comme on sait que cela doit être.

Quand on ne fixe qu'un seul point C, il est bien vrai que le point A ne peut plus se mouvoir que sur une sphère déterminée; mais observez qu'il ne peut le faire sans entraîner l'autre point B, lequel étant sollicité par une force (qu'on n'a pas pu supprimer puisqu'il est resté mobile), réagit nécessairement sur le point A. Dans cette hypothèse donc, la force que l'on voit appliquée en A n'est pas la seule qui sollicite ce point; et il n'est pas nécessaire qu'elle soit perpendiculaire à la surface qu'il pourrait décrire, puisque, d'après le principe même, cela ne convient qu'à la résultante de toutes les forces qui pourraient agir sur le point que l'on considère. Il n'en est pas de même quand on suppose rendus fixes à la fois les deux points B et C: la force appliquée au point A est alors la seule qui le presse, puisqu'on peut regarder les deux autres forces du système comme supprimées; et, par conséquent, il est nécessaire ici que la force appliquée soit perpendiculaire à la direction de la courbe où le point conserve encore la liberté de se mouvoir.

Au reste, on pourrait encore appliquer le principe dans la première hypothèse; mais, pour être exact, il faudrait commencer par prendre l'action du point B sur le point A, combiner ensuite cette force avec celle qui y est immédiatement appliquée, et l'on trouverait que la résultante de ces deux forces doit être normale à la sphère dont il s'agit, comme cela a réellement lieu.

Mais il est bien plus clair et plus simple de n'employer ce principe que selon l'énoncé qu'on en a fait au commencement de cette Note. On ne s'en est même servi dans le Mémoire que pour les systèmes où les points ne sont liés que par une seule équation: il n'y a pas là deux manières de l'entendre; car, s'il n'y a qu'une seule

équation entre les coordonnées des points, il faut nécessairement les supposer fixes tous, hors un seul, pour que celui-ci devienne assujetti à ne pouvoir plus que décrire une surface. Si l'on en laissait seulement un autre mobile, celui que l'on considère ne serait gêné d'aucun côté dans l'espace; il pourrait encore s'y mouvoir en tous sens, et il n'y aurait plus lieu de rien tirer de cette hypothèse pour la direction que doit avoir la force appliquée dans le cas de l'équilibre.

Puisque, dans la théorie générale de l'équilibre, il a suffi de considérer ce principe dans un cas où il n'offre pas la plus légère difficulté, et que tout le reste s'en trouve déduit avec rigueur, on aurait pu se dispenser d'y revenir dans cette Note, et de lever des difficultés qui ne peuvent pas naître. Mais nous avons voulu faire voir que ce principe est général, qu'il a lieu dans toutes les machines, et nous l'avons remarqué particulièrement dans le *levier*, pour nous conformer au désir que M. Lagrange nous a fait l'honneur de nous témoigner à cet égard. Le levier n'est, en effet, que le système de l'exemple précédent, où l'un C des trois points A, B, C est véritablement fixe. On ne considère plus alors que l'équilibre des deux forces appliquées aux deux bouts A et B du levier, et le point d'appui C tient lieu de la troisième force. On voit donc que notre principe ne dit pas que les deux forces appliquées doivent être normales aux sphères que les deux bouts A et B du levier pourraient décrire autour du point d'appui C, mais bien qu'elles doivent être perpendiculaires aux arcs de cercles respectifs que ces points pourraient décrire autour des droites CB et CA, comme axes de révolution; d'où il suit que *les deux forces appliquées doivent être dans un même plan avec*

*l'appui;* ce qui est en effet la première condition connue de l'équilibre du levier.

Quant à la seconde condition, elle résulte de ce qu'on a dit sur les systèmes invariables : chacune des deux forces étant décomposée en deux autres, la première vers le point d'appui, la seconde vers l'autre bout du levier, les deux premières se trouvent toujours détruites par la résistance de l'appui; mais les deux secondes doivent être parfaitement égales et contraires : d'où il suit que *les deux forces appliquées sont réciproques à leurs distances au point d'appui.*

Tout cela subsiste, quel que soit l'angle C du triangle ACB, et, par conséquent, a lieu encore dans le cas où cet angle devient égal à deux droits. Les trois points A, C, B tombent alors en ligne droite : et c'est ainsi qu'on passe au *levier droit,* qui n'est qu'un cas particulier de celui que nous venons de considérer. Mais on n'y pourrait plus immédiatement appliquer les raisonnements qui précèdent; car les trois points A, C, B étant en ligne droite, si l'on en suppose deux fixes, le troisième se trouve tout à fait arrêté; ce qui n'apprend plus rien pour les directions des forces, ou ce qui semblerait dire qu'elles peuvent être dirigées d'une manière quelconque. D'un autre côté, on ne peut plus décomposer chacune d'elles en deux autres, suivant les mêmes lignes que ci-dessus, puisque ces lignes n'en font plus qu'une seule. Aussi, pour comprendre et bien expliquer l'équilibre du levier *droit* ACB, faut-il le supposer d'abord courbe, ou un peu coudé au point d'appui C, comme l'a fait Newton, et après lui d'Alembert dans son *Traité de Dynamique.*

On voit reparaître alors les vraies conditions de l'équilibre du levier, et même la manière dont les forces

y réagissent l'une sur l'autre. Que si la marche paraît indirecte et la démonstration peu naturelle, en ce qu'on paraît déduire une chose simple d'une chose composée, c'est qu'on ne fait pas assez d'attention à l'idée de roideur, qui paraît simple et qui est réellement complexe. Pour écrire, en effet, que trois points A, C, B font un système roide, il faut nécessairement écrire que leurs trois distances mutuelles sont *séparément* invariables, et cela, que les trois points soient en ligne droite ou non. Il n'y a donc, pour l'objet que l'on a en vue, rien de plus simple dans un cas que dans l'autre. Mais si, dans le cas où les points sont en ligne droite, la loi de leur équilibre ne se montre plus aussi bien, ou même nous échappe, il sera très-naturel de supposer d'abord que les trois points ne sont pas en ligne droite, d'y voir alors la loi de l'équilibre, et de la suivre jusqu'au cas où les points redeviennent en ligne droite. C'est ainsi que dans l'Analyse, pour trouver les vraies valeurs de certains symboles algébriques, il ne faut plus les considérer en eux-mêmes, mais remonter aux fonctions qui les ont pu produire par l'hypothèse de quelques valeurs particulières attribuées aux variables.

Ce qu'on vient de dire donne la vraie cause de l'équilibre du levier. Dans la nature, un levier *droit*, *sans épaisseur*, est impossible : il serait rompu par la plus petite force transversale. La destruction des forces ne peut s'y opérer que par sa résistance longitudinale, et, par conséquent, il faut toujours que ces forces puissent se décomposer en d'autres qui se détruisent dans l'*intérieur* du levier lui-même.

## NOTE II.

*Sur ce point de doctrine, que les seules forces capables d'être en équilibre sur un système défini par plusieurs équations ne sont autre chose que les composées de celles qui s'y feraient séparément équilibre en vertu de chacune de ces équations.*

S'il pouvait rester dans l'esprit quelque doute sur cet important théorème, qui n'a paru, dans le Mémoire, que comme une conséquence rapide tirée d'un raisonnement assez délicat, voici une autre manière de l'établir et d'en mettre la vérité à l'abri de toute objection.

Soit, pour abréger le discours, l'exemple d'un système où les points ne sont liés que par les trois équations

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} f(m, n, p, q, r, s, \text{etc.}) = const., \\ \varphi(m, n, p, q, r, s, \text{etc.}) = const., \\ \psi(m, n, p, q, r, s, \text{etc.}) = const., \end{cases}$$

entre leurs distances mutuelles $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, etc.

Nous avons démontré que si ces points sont sollicités les uns vers les autres suivant leurs distances $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, etc., par des forces égales et contraires dont les valeurs respectives, désignées par M, N, P, Q, R, S, etc., soient exprimées par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \lambda \mathrm{f}'(m) + \mu\varphi'(m) + \nu\psi'(m), \\ \mathrm{N} &= \lambda \mathrm{f}'(n) + \mu\varphi'(n) + \nu\psi'(n), \\ \mathrm{P} &= \lambda \mathrm{f}'(p) + \mu\varphi'(p) + \nu\psi'(p), \\ \mathrm{Q} &= \lambda \mathrm{f}'(q) + \mu\varphi'(q) + \nu\psi'(q), \\ \mathrm{R} &= \lambda \mathrm{f}'(r) + \mu\varphi'(r) + \nu\psi'(r), \\ \mathrm{S} &= \lambda \mathrm{f}'(s) + \mu\varphi'(s) + \nu\psi'(s), \\ &\text{etc., etc.;} \end{aligned}$$

toutes ces forces seront en équilibre sur le système, et cela quelles que soient les valeurs qu'on veuille donner aux trois coefficients $\lambda$, $\mu$, $\nu$. Il est clair, en effet, que l'ensemble de ces forces peut être vu comme la réunion de trois groupes partiels, dont chacun, relatif à chaque équation, serait en équilibre à part, en vertu de cette seule équation (titre II du *Mémoire*).

Or, maintenant, je dis que ces forces (ou leurs diverses résultantes A, B, C, D, etc., aux divers points $a$, $b$, $c$, $d$, etc., du système) sont les seules forces qui puissent se faire équilibre : c'est-à-dire que si l'on en veut supposer d'autres aussi en équilibre, et qui, par cela même, seraient aussi décomposables en forces deux à deux égales et contraires de valeurs M′, N′, P′, Q′, R′, S′, etc., dans les mêmes lignes $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, etc., on trouvera que ces nouvelles forces rentrent toutes nécessairement dans les mêmes expressions que les premières M, N, P, Q, R, S, etc.

Pour le démontrer, je remarque d'abord qu'on peut toujours, au moyen des trois coefficients indéterminés $\lambda$, $\mu$, $\nu$, faire rentrer trois quelconques de ces forces, et par exemple, les trois premières M′, N′, P′, dans les mêmes expressions que les trois correspondantes M, N, P, et poser ainsi les trois équations

$$M' = M, \quad N' = N, \quad P' = P;$$

car il suffit de donner à $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les trois valeurs propres à vérifier ces équations linéaires en $\lambda$, $\mu$, $\nu$; valeurs toujours déterminées, puisqu'on ne suppose entre $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, etc., que les trois équations (A), qui sont *différentes* par hypothèse, et *compatibles* entre elles par la nature même de la question.

Après avoir ainsi disposé de ces trois coefficients, on ne peut plus continuer d'égaler chacune à chacune les forces qui restent, puisqu'elles se trouvent alors toutes déterminées; mais on est toujours le maître de poser les équations

$$Q' = Q + \chi, \quad R' = R + \rho, \quad S' = S + \sigma, \text{ etc.},$$

en désignant par $\chi$, $\rho$, $\sigma$, etc., les valeurs des forces égales et contraires qu'il faudrait ajouter suivant les lignes $q$, $r$, $s$, etc., pour remplir ces égalités.

Ainsi, toutes les forces M′, N′, P′, Q′, R′, S′, etc., qu'on suppose en équilibre sur le système, peuvent toujours être représentées par

$$M, N, P, \quad Q + \chi, \quad R + \rho, \quad S + \sigma, \text{ etc.}$$

Mais les forces

$$M, N, P, Q, R, S, \text{ etc.},$$

considérées à part, se font équilibre : donc, en les supprimant, on trouverait qu'il y a équilibre entre les forces

$$0, 0, 0, \chi, \rho, \sigma, \text{ etc.},$$

qui agissent suivant les lignes respectives

$$m, n, p, q, r, s, \text{ etc.}$$

Or, comme parmi ces nouvelles forces il y en a déjà trois *nulles* dans les lignes $m$, $n$, $p$, je dis que l'équilibre des autres $\chi$, $\rho$, $\sigma$, etc., est impossible à moins que chacune d'elles ne soit aussi nulle; et par exemple, je dis que la valeur $\chi$ des deux forces égales et contraires qui agissent dans la ligne $q$ est nécessairement nulle d'elle-même.

En effet, si les forces 0, 0, 0, $\chi$, $\rho$, $\sigma$, etc., pouvaient se faire équilibre sur le système proposé, où les

points ne sont liés que par les trois équations données (A), à plus forte raison se feraient-elles équilibre si l'on ajoutait les nouvelles conditions que les distances mutuelles $r$, $s$, $t$, etc., soient rendues séparément invariables. Mais alors on pourrait, sans troubler l'équilibre, supprimer toutes les forces égales et contraires $\rho$, $\sigma$, $\tau$, etc., qui se détruiraient d'elles-mêmes dans ces lignes roides. On conclurait donc que l'équilibre reste entre les deux seules forces égales et contraires de valeur $\chi$, qui sollicitent l'un vers l'autre les deux points dont la distance mutuelle est $q$. Or maintenant, il est bien aisé de voir que cet équilibre est impossible à moins que $\chi$ ne soit nulle d'elle-même. Et, en effet, malgré les trois équations données (A) et les équations ajoutées $r = const.$, $s = const.$, $t = const.$, etc., nos deux points sont encore libres de se rapprocher ou de s'éloigner l'un de l'autre, puisque les *quatre* distances mutuelles $m$, $n$, $p$, $q$, restées seules variables, ne se trouvent liées que par les trois équations données (A). Une quelconque de ces distances, et par exemple $q$, peut donc varier à volonté; et les deux forces égales et contraires $\chi$ produiront nécessairement cette variation. Car, bien qu'on ne puisse faire varier la distance $q$ sans forcer les trois autres $m$, $n$, $p$, de prendre des variations déterminées en conséquence des trois équations (A), comme il n'y a, suivant ces trois lignes $m$, $n$, $p$, que des forces *nulles* pour s'opposer à ces trois variations, il s'ensuit qu'il n'y a rien dans le système qui puisse empêcher les deux forces $\chi$ de produire la variation de la distance $q$ des deux points qu'elles sollicitent en sens contraires, et que, par conséquent, il ne peut y avoir équilibre à moins que $\chi$ ne soit nulle d'elle-même.

On voit donc que toutes ces forces $\chi$, $\rho$, $\sigma$, $\tau$, etc., sont nécessairement nulles, et que les forces proposées M′, N′, P′, Q′, R′, S′, T′, etc., par cela seul qu'on les suppose capables d'être en équilibre sur le système, doivent rentrer toutes dans les mêmes expressions que les premières M, N, P, Q, R, S, T, etc. *Ce qu'il fallait démontrer.*

Cette démonstration est générale. C'est uniquement pour abréger le discours qu'on a pris l'exemple d'un système où les points ne sont liés que par *trois* équations; mais il est clair que notre raisonnement n'emprunte rien de cet exemple, et qu'il se ferait de la même manière si les points étaient liés par *un nombre quelconque* d'équations. Ainsi, le théorème qui fait l'objet de cette Note se trouve complétement démontré.

De plus, il faut remarquer que notre théorème ne convient pas seulement à un système *libre*, et où, par conséquent, la liaison des corps ne peut jamais consister que dans des équations données entre leurs *distances mutuelles* : il est également vrai pour un système de points liés par des équations quelconques entre leurs coordonnées relatives à des objets fixes; car il est facile de ramener la considération d'un tel système à celle d'un système entièrement libre, comme on l'a vu au titre IV de notre Mémoire. On peut donc dire, de la manière la plus générale, que *l'équilibre d'un système quelconque défini par plusieurs équations peut toujours se décomposer en autant d'équilibres, dont chacun, relatif à chaque équation, a réellement lieu à part, en vertu de cette seule équation.* C'est, en quelque sorte, la superposition de tous ces équilibres partiels qui fait l'équilibre général du système.

Mais il y a encore quelques conséquences délicates à tirer de cette analyse.

En Mécanique, on pourrait nommer *simple* tout système où les points ne sont liés que par *une seule équation :* car il n'y a alors que des forces de proportion et de directions déterminées qui puissent s'y faire équilibre. Ce groupe de forces est donc simple, ou indécomposable en groupes différents capables d'un équilibre séparé. Or, de l'analyse qui précède il résulte que, dans chaque cas d'équilibre, on peut toujours voir comme simple un système quelconque *complexe*, c'est-à-dire dont les points sont liés à la fois par *plusieurs* équations.

En effet, qu'on multiplie respectivement ces équations par des coefficients constants indéterminés $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc., et qu'on les ajoute toutes ensemble pour n'en former qu'une seule équation qui peut être nommée la *résultante;* il sera toujours permis de supposer que les points du système ne sont liés entre eux que par cette seule équation. Car, si l'on en tire, suivant cette hypothèse, les expressions des forces capables de l'équilibre, on est sûr que ces expressions, au moyen des coefficients indéterminés $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc., qu'elles renferment, seront propres à représenter tous les groupes imaginables de forces capables d'être en équilibre sur le système complexe dont il s'agit.

Considérons un de ces groupes en particulier, et, par conséquent, donnons à $\lambda$, $\mu$, $\nu$, etc., les valeurs particulières $\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$, etc., qui répondent à ce groupe. L'équation résultante devient alors une équation tout à fait déterminée. Or il est clair que, pour ce groupe, on peut, sans que l'équilibre soit troublé, supposer que les points ne sont plus liés entre eux que par cette seule équation, et supprimer, en conséquence, dans le système tous les divers liens représentés par les diverses équations, pourvu

qu'on les remplace par le lien unique représenté par l'équation déterminée dont il s'agit. Ainsi, le système complexe pourrait se transformer tacitement en un système simple sans que l'équilibre fût rompu. Voici la seule différence de ces deux équilibres. Si l'on conserve entre les corps tous les liens donnés, le groupe de forces pourra se décomposer en autant de groupes différents dont chacun serait en équilibre à part en vertu de chaque lien : si l'on ne met entre ces corps que le lien unique dont j'ai parlé, le groupe de forces reste en équilibre, mais il devient indécomposable; il faut alors que toutes les forces y agissent à la fois ou que le groupe reste un, comme dans le cas d'un système parfaitement simple.

On connaît cet axiome de toute évidence, qu'on ne trouble pas l'équilibre de plusieurs corps en ajoutant, aux liens qu'on suppose déjà les unir entre eux, tant de nouveaux liens qu'on voudra : mais on voit ici une espèce de proposition inverse qui ne paraît pas si évidente. C'est qu'on peut aussi, sans troubler l'équilibre, ôter tous les liens donnés qui unissent les différents points d'un système, pourvu qu'on y substitue un seul lien convenablement choisi : de sorte que ces points peuvent passer de l'état de la plus grande dépendance à celui de la plus grande liberté, sans cesser d'être en équilibre sous l'action des mêmes forces (j'entends ici la plus grande liberté que des points puissent avoir quand ils font encore un *système*, c'est-à-dire lorsqu'ils restent liés ensemble au moins par une équation).

Cette équation, qui peut tenir lieu de toutes les autres, s'en déduit facilement, comme on l'a vu tout à l'heure : mais on peut aussi la trouver, ou du moins en former une équivalente, sans connaître en rien les équations du

système : il suffit de connaître le groupe des forces qu'on y suppose en équilibre. Car soient M, N, P, Q, R, S, etc., les valeurs actuelles de ces forces décomposées suivant les distances mutuelles $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, etc., des différents corps; il est clair qu'on peut prendre, pour représenter le lien cherché, la simple équation linéaire

$$Mm + Nn + Pp + Qq + Rr + Ss + \text{etc.} = const.$$

C'est ce qui résulte évidemment de notre analyse; car, en prenant les fonctions *primes* du premier membre, on trouverait sur-le-champ M, N, P, etc., pour les forces de l'équilibre. Mais c'est ce qu'on pourrait voir aussi par la simple théorie des polygones funiculaires : car la liaison exprimée par l'équation précédente peut être réalisée, en Mécanique, au moyen d'un seul fil flexible et inextensible. Supposons, en effet (ce qui est ici permis), que les forces M, N, P, Q, R, S, etc., soient commensurables entre elles, et prenons pour unité la demi commune mesure. Les valeurs M, N, P, etc., deviendront des nombres entiers et tous *pairs*. Or on peut démontrer que, dans ce cas, il est toujours possible de conduire par tous les points du système, comme par autant d'anneaux, un même fil qui revienne au point de départ, après avoir passé M fois sur la distance $m$, N fois sur la distance $n$, P fois sur la distance $p$, etc., de manière que la longueur totale de ce fil, qu'on pourra fermer, soit exprimée par $Mm + Nn + Pp +$ etc.

Si donc ce fil flexible, le long duquel les points peuvent couler librement, n'est pas susceptible de s'allonger, et que les forces agissent de manière à ce qu'il soit tendu, il représentera la liaison dont il s'agit. Or, pour l'équilibre d'un tel système, il est bien évident que le fil doit avoir partout la même tension; que, par conséquent,

les valeurs des forces égales et contraires qui ont lieu entre les points, suivant leurs distances $m$, $n$, $p$, $q$, $r$, $s$, etc., sont précisément entre elles comme les nombres M, N, P, Q, R, S, etc. : d'où l'on voit que les points $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, etc., du système ne peuvent être tenus en équilibre que par ces forces, ou par d'autres A, B, C, D, E, etc., qui soient capables de se décomposer en celles-là. Etc., etc.

## NOTE III.

*Démonstration du principe des vitesses virtuelles. Identité de ce principe avec le théorème général qui fait l'objet du Mémoire précédent.*

On s'est contenté d'observer, dans le Mémoire, que du théorème où l'on est parvenu sur l'expression générale des forces de l'équilibre, on pouvait passer aisément au principe des vitesses virtuelles. Mais ce principe est si célèbre dans l'histoire de la Mécanique, que je ne puis m'empêcher de marquer en peu de mots ce [illegible]; et j'y reviens d'autant plus volontiers, que n[illegible]ment le principe des virtuelles est un corollaire [illegible]ropo-sition générale établie ci-dessus, mais qu'il [illegible]raît encore identique avec elle lorsqu'on le reg[illegible] sous son vrai point de vue, et qu'on l'énonce d'un[illegible]anière complète.

Soit le système défini par les équations suivantes entre les coordonnées des corps

$$(A)\qquad \begin{cases} f(x,\ y,\ z;\quad x',\ y',\ z',\ \text{etc.}) = 0, \\ \varphi(x,\ y,\ z;\quad x',\ y',\ z',\ \text{etc.}) = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Supposons qu'on imprime à tous ces corps des vitesses quelconques qu'ils puissent avoir actuellement sans violer les conditions de la liaison : les coordonnées $x$, $y$, $z$; $x'$, $y'$, $z'$, etc., varieront avec le temps $t$, dont il faudra les regarder comme fonctions; et, pour que les vitesses imprimées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, etc., soient permises par la liaison, comme on le suppose, il faudra qu'elles satisfassent aux équations

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} f'(x)\frac{dx}{dt} + f'(y)\frac{dy}{dt} + f'(z)\frac{dz}{dt} + f'(x')\frac{dx'}{dt} + \text{etc.} = 0, \\ \varphi'(x)\frac{dx}{dt} + \varphi'(y)\frac{dy}{dt} + \varphi'(z)\frac{dz}{dt} + \varphi'(x')\frac{dx'}{dt} + \text{etc.} = 0, \\ \text{etc.}, \end{cases}$$

tirées des précédentes (A); et il suffira qu'elles y satisfassent pour que les conditions de la liaison soient observées.

Ou bien, si l'on multiplie ces équations par des coefficients quelconques indéterminés $\lambda$, $\mu$, etc., et qu'on les ajoute, il suffira que les vitesses satisfassent à la seule équation suivante, indépendamment de $\lambda$, $\mu$, etc.,

$$(\mathrm{C})\quad \left\{ \begin{aligned} &[\lambda f'(x) + \mu\varphi'(x) + \text{etc.}]\frac{dx}{dt} \\ &+ [\lambda f'(y) + \mu\varphi'(y) + \text{etc.}]\frac{dy}{dt} \\ &+ [\lambda f'(z) + \mu\varphi'(z) + \text{etc.}]\frac{dz}{dt} \\ &+ [\lambda f'(x') + \mu\varphi'(x') + \text{etc.}]\frac{dx'}{dt} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned} \right\} = 0.$$

Or les fonctions qui multiplient les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,

$\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, etc., ne sont autre chose (d'après ce qui a été démontré) que les expressions générales des forces capables d'être en équilibre sur le système. Supposant donc des forces X, Y, Z; X′, Y′, Z′, etc., qui s'y feraient actuellement équilibre, on aurait nécessairement

$$(D)\quad X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dx'}{dt} + Y'\frac{dy'}{dt} + \text{etc.} = 0.$$

Au lieu des trois composantes X, Y, Z, multipliées par les vitesses respectives $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on peut mettre la résultante P, multipliée par la vitesse résultante $\frac{ds}{dt}$, projetée sur la direction de P, et que je nommerai $\frac{dp}{dt}$; et de même pour les autres, et l'on aura

$$P\frac{dp}{dt} + P'\frac{dp'}{dt} + P''\frac{dp''}{dt} + \text{etc.} = 0;$$

c'est-à-dire que, *si des forces se font équilibre sur un système quelconque, la somme de leurs produits par les vitesses, quelles qu'elles soient, qu'on voudra imprimer aux corps, mais que leur liaison permet, sera toujours égale à zéro, en estimant ces vitesses suivant les directions des forces.*

On voit par là qu'on peut prendre des vitesses quelconques finies, que l'on mesurerait par des droites quelconques qui seraient simultanément décrites par les corps, s'ils venaient tout à coup à rompre leur liaison et à s'échapper librement chacun de son côté.

Quand on veut mesurer ces vitesses par les espaces mêmes que les corps décrivent réellement, comme elles

varient à chaque instant par la liaison des corps, il faut prendre ces espaces infiniment petits, sans quoi ils ne mesureraient plus les vitesses imprimées; et c'est ainsi qu'on tombe dans les *vitesses virtuelles* proprement dites, où le principe vient perdre une partie de sa clarté.

Il résulte, en effet, de ce que nous venons de dire, que cette belle propriété de l'équilibre peut s'énoncer de la manière suivante :

*Lorsqu'on voit suivre aux différents corps d'un système des mouvements quelconques qui ne violent point la liaison établie entre eux, c'est-à-dire qui nous présentent continuellement le système dans des figures où les équations de condition subsistent, on peut être sûr que les forces qui seraient capables de se faire équilibre sur une de ces figures, dans le moment où le système y passe, sont telles que, multipliées par les vitesses actuelles des corps projetées sur leurs directions, la somme de tous ces produits est nécessairement égale à zéro.*

Le principe, de cette manière, n'offre plus aucune trace de ces idées de mouvements infiniment petits, et de perturbation d'équilibre qui paraissent étrangères à la question, et qui laissent dans l'esprit quelque chose d'obscur.

Lorsqu'il y a équilibre, il est clair que le principe a lieu pour tous les systèmes de vitesses que les points pourraient avoir en passant par la figure que l'on considère.

Mais quand on veut partir du principe, et l'énoncer de manière qu'il assure l'équilibre, faut-il dire qu'il a lieu pour ce nombre infini de systèmes de vitesses? Il y aurait surabondance de conditions, et l'on voit qu'il suffit de dire que l'équation (D) doit se vérifier pour autant de systèmes de vitesses que les équations de condition (B) en laissent d'indépendantes, ou bien

[en réunissant, comme on l'a fait ci-dessus, toutes ces équations en une seule (C), au moyen des indéterminées $\lambda$, $\mu$, etc.], il suffit de dire que l'équation (D) des *moments* doit se vérifier pour autant de systèmes de vitesses qu'il y a de ces vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, etc. Mais comme chacun de ces systèmes de vitesses doit satisfaire à l'équation (C), par hypothèse, cela revient à dire que toutes les forces appliquées X, Y, Z; X', Y', Z', etc., qui multiplient les vitesses $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, etc., dans l'équation (D), doivent être toutes proportionnelles aux fonctions

$$[\lambda f'(x) + \mu\varphi'(x) + \text{etc.}], \quad [\lambda f'(y) + \mu\varphi'(y) + \text{etc.}],$$
$$[\lambda f'(z) + \mu\varphi'(z) + \text{etc.}], \quad [\lambda f'(x') + \mu\varphi'(x') + \text{etc.}],$$
$$[\lambda f'(y') + \mu\varphi'(y') + \text{etc.}], \quad \text{etc.},$$

qui multiplient les mêmes vitesses dans l'équation générale (C), qui fait régner entre elles les seules conditions que la liaison exige. Donc le principe des vitesses virtuelles, bien énoncé, c'est-à-dire avec toutes les idées qui peuvent le faire comprendre, est parfaitement identique avec le théorème général qui fait l'objet du Mémoire. Il dit exactement la même chose, savoir, que, pour l'équilibre, les forces appliquées suivant les coordonnées des corps, en vertu de chaque équation, doivent être proportionnelles aux fonctions *primes* de cette équation, relativement à ces coordonnées respectives : mais c'était là précisément ce qu'il fallait démontrer.

Au reste, on serait encore conduit à reconnaître cette identité en partant de l'énoncé ordinaire du principe des

vitesses virtuelles, et se rendant bien compte, avant tout, du vrai sens qu'on y doit attacher. En effet, le problème général de la Statique n'est pas seulement de chercher les rapports des forces qui se font actuellement équilibre sur le système, mais bien l'expression générale des forces qui peuvent s'y faire continuellement équilibre, dans toutes les figures où il peut passer en vertu des équations de condition. L'équation générale donnée par le principe des vitesses virtuelles n'est donc pas, s'il est permis de parler ainsi, la relation d'un instant ; elle ne doit pas simplement considérer l'équilibre du système dans la figure où il est, mais encore dans toute la suite des figures où il peut être, puisque c'est cette suite de figures qui le caractérise et en constitue la définition. Ainsi, cette équation ne dit pas qu'il faut prendre pour les forces de tels nombres qu'elle en soit satisfaite, mais (puisque ces forces doivent varier avec la figure) qu'il faut choisir, pour les représenter, de telles fonctions des coordonnées, qu'elle demeure continuellement satisfaite, ou soit identique. Or, en vertu des conditions mêmes, on sait qu'il doit régner entre les vitesses simultanées que pourraient avoir les corps une équation linéaire identique (C), dont les coefficients sont les fonctions *primes* des fonctions données par rapport aux coordonnées suivant lesquelles on estime ces vitesses. L'équation des *moments* dit donc que les forces de l'équilibre doivent être représentées par ces fonctions primes ; et, par conséquent, pour la démontrer, il fallait faire voir comment de telles forces se font effectivement équilibre, ou bien il fallait chercher directement quelles fonctions des coordonnées peuvent représenter les forces de l'équilibre, comme nous l'avons fait d'abord.

C'est pourquoi la plupart des démonstrations par lesquelles on a ramené le principe des vitesses virtuelles, ou à d'autres principes, ou à la loi connue de quelque machine simple, telle que le levier, etc., nous paraissent bien plutôt des *preuves* que de véritables démonstrations. Toutes, en effet, même la plus heureuse, qui est de Carnot, se font sans rien emprunter de la définition générale du système, comme si la machine était, pour ainsi dire, voilée, et qu'on n'en vît sortir que les cordons où sont appliquées les puissances. On peut bien prouver, ou rendre sensible par quelque construction plus ou moins simple, que si l'on trouble un peu l'équilibre, ces puissances doivent être dans un certain rapport avec les allongements permis de ces cordons; mais cela ne peut offrir que les rapports actuels des forces considérées comme nombres, et ne montre point du tout la forme d'expression qui leur est propre. Cette perturbation de l'équilibre n'apprendrait, dans aucun cas, à quelle machine on aurait affaire, et les mêmes rapports pourraient s'offrir entre les forces appliquées, quoique les machines fussent de constitution tout à fait différente, et que chacune d'elles imprimât pourtant à l'expression des forces qui lui conviennent une forme différente, qu'on y devrait voir et retrouver sans cesse, si la difficulté du théorème était entièrement consommée. Ainsi, la propriété des vitesses virtuelles n'en restait pas moins mystérieuse, et l'on n'avait point de véritable démonstration, je veux dire une explication ouverte et claire, où l'on vît non-seulement que la chose se passe ainsi, mais qu'elle est encore une suite de la définition générale que soi-même on a donnée au système que l'on considère.

C'est peut-être par quelque vue semblable, et pour

arriver à l'équation des *moments virtuels* comme à une équation identique, que M. Laplace (*Mécanique céleste*, tome I, page 40), ne considère que les équations qui représentent la liaison des parties du système, et ne suppose d'autres principes que celui de la composition des forces, et de l'égalité entre l'action et la réaction; ce qu'on peut regarder comme les éléments de la théorie de l'équilibre. Mais, comme dans son raisonnement l'auteur ne fait rien entrer qui vienne de la définition du système dont il s'occupe, sa démonstration n'a aucune force, et la difficulté reste en son entier.

Quoi qu'il en soit d'ailleurs, soit qu'on veuille partir du principe des vitesses virtuelles pour en suivre jusqu'au bout la signification intime, soit qu'on attaque directement le problème de la Mécanique, ce qui est bien plus simple, on se trouve amené sur-le-champ à cette question générale : *Quelles sont les fonctions des coordonnées qui donnent les forces de l'équilibre dans toutes les figures que peut affecter le système, en obéissant aux équations qui règnent entre les coordonnées des différents corps?* Tel est exactement le problème que nous nous sommes proposé; et notre objet, bien net et bien distinct, a été de le résoudre par les premiers principes de la Statique et de la Géométrie.

---

## ADDITION *à la Note qui précède.*

On vient de voir le principe des vitesses comme un simple corollaire du théorème général qui fait l'objet de notre Mémoire. Je pourrais encore indiquer d'autres corollaires tout aussi remarquables, et qu'on tire avec la

même facilité de ce lumineux théorème : car il ne s'agit, pour ainsi dire, que d'en varier l'expression.

Et par exemple, lorsque, pour l'équilibre d'un système quelconque, défini (comme on peut toujours le supposer) par une seule équation $L = constante$, nous disons que les forces appliquées aux différents points, suivant leurs coordonnées rectangles $x$, $y$, $z$; $x'$, etc., doivent être toutes proportionnelles aux fonctions *primes* ou coefficients différentiels $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$, $\frac{dL}{dz}$; $\frac{dL}{dx'}$, etc., de la fonction donnée $L$, n'est-il pas évident que cela revient à dire, en d'autres termes, que des forces X, Y, Z, X', etc., qu'on supposerait capables d'être en équilibre sur un système quelconque, doivent toujours être de telle nature, que la formule

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + X'\,dx' + \text{etc.},$$

soit *une différentielle exacte?*

Ainsi, cette expression singulière, sous laquelle Clairaut a découvert le premier les lois de l'équilibre d'une masse fluide, n'est point particulière aux fluides; mais elle convient également à l'équilibre de tous les systèmes possibles : ce qui est assurément bien digne d'être remarqué.

Cette condition toute seule ne suffirait pas pour assurer l'équilibre des forces proposées X, Y, Z; X', etc. Il faut évidemment y ajouter que l'intégrale de la différentielle complète $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + X'\,dx' + \text{etc.}$, doit être une quantité *constante* par la nature du système : sans quoi les points d'application ne seraient pas liés entre eux d'une manière qui les rendît capables de résister ensemble à l'action des forces appliquées, et il n'y aurait point équilibre.

Mais cette seconde condition pourrait aussi s'exprimer autrement; car, au lieu de dire que l'intégrale dont il s'agit

doit être constante, on peut dire que la différentielle doit être *nulle*, et qu'ainsi on doit avoir l'équation

$$X dx + Y dy + Z dz + X' dx' + \text{etc.} = 0;$$

ce qui ramène encore le principe des vitesses virtuelles, non comme principe, mais comme une équation qui exprime la liaison nécessaire qu'il faut supposer entre les points du système.

Je pourrais encore faire remarquer que le paradoxe hydrostatique de Stevin, relatif à la pression qu'un fluide pesant peut exercer sur le fond d'un vase où il est renfermé, non-seulement n'est point un paradoxe, ni même une proposition particulière aux fluides, mais une simple conséquence de notre théorie générale, et qu'on retrouve dans l'équilibre de tous les systèmes possibles. Car, en supposant que, dans un système quelconque, on rende fixes quelques-uns des points, pour considérer les pressions qu'ils peuvent ressentir de la part des forces appliquées aux autres points du système, il est bien évident qu'on peut, sans changer ces pressions, fixer encore une partie quelconque de ces autres points. On peut donc indifféremment regarder les pressions exercées sur les premiers points fixes comme étant dues, soit à l'ensemble des forces appliquées à tous les autres, soit à une partie quelconque d'entre elles, et quelquefois même à une seule force, si le système est de telle nature que le point d'application de cette force conserve encore quelque liberté quand on arrête tous les autres. D'où l'on voit, etc.

Mais je n'irai pas plus loin dans ces détails : ce peu d'exemples montrent assez que notre théorie éclaire et domine également toutes les parties de la Mécanique.

---

# THÉORIE NOUVELLE

DE LA

# ROTATION DES CORPS,

PRÉSENTÉE A L'INSTITUT LE 19 MAI 1834.

Voici une des questions qui m'ont le plus souvent occupé, et, si l'on me permet de parler ainsi, une des choses que j'ai le plus désiré de savoir en Dynamique.

Tout le monde se fait une idée claire du mouvement d'un *point*, c'est-à-dire du mouvement d'un corpuscule qu'on suppose infiniment petit, et qu'on réduit en quelque sorte par la pensée à un point mathématique; car il ne reste plus alors qu'à se représenter la ligne, droite ou courbe, que ce point peut décrire, et la vitesse avec laquelle il se meut suivant cette ligne. Mais s'il s'agit du mouvement d'un corps *de grandeur sensible et de figure quelconque*, il faut convenir qu'on ne s'en fait qu'une idée très-obscure.

A la vérité, cette idée paraît d'abord s'éclaircir ou se résoudre naturellement en deux autres. En effet, si l'on s'attache à regarder un seul et même point du corps,

on peut suivre, d'un côté, le mouvement de ce point qui ne peut décrire qu'une certaine ligne dans l'espace, et, de l'autre côté, le mouvement du corps qui ne peut que tourner en même temps sur ce point comme autour d'un centre fixe. Mais ce second mouvement, c'est-à-dire celui d'un corps mobile autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter dans tous les sens, ne présente lui-même qu'une idée très-obscure.

Ce n'est pas qu'en rapportant les points du corps à des plans ou objets fixes dans l'espace, on n'ait su trouver ce qu'on appelle les *équations différentielles* de ce mouvement, et même qu'on ne soit venu à bout d'*intégrer* ces équations, ou du moins d'en ramener les intégrales aux *quadratures*, dans le cas simple d'un corps libre de toute action étrangère. Euler et d'Alembert à peu près dans le même temps, et par des méthodes différentes, ont les premiers résolu cette importante et difficile question de la Mécanique : et l'on sait que, depuis, l'illustre Lagrange a repris de nouveau ce fameux problème, pour l'approfondir et le développer à sa manière, je veux dire par une suite de formules et de transformations analytiques qui présentent beaucoup d'ordre et de symétrie. Mais il faut convenir que, dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs, sans aucune image nette de la rotation du corps. On peut bien, par ces calculs plus ou moins longs et compliqués, parvenir à déterminer le lieu où se trouvera le corps au bout d'un temps donné : mais on ne voit point du tout comment le corps y arrive; on le perd entièrement de vue, tandis qu'on voudrait l'observer, et le suivre, pour ainsi dire, des yeux dans tout le cours de sa rotation.

Or c'est cette idée claire du mouvement de rotation que j'ai tâché de découvrir, afin de mettre sous les yeux ce que personne ne s'était encore représenté.

Il en résulte une solution toute nouvelle du problème de la rotation d'un corps abandonné à lui-même, soit qu'il tourne librement sur son centre de gravité, ou sur tout autre point fixe autour duquel il serait forcé de se mouvoir : véritable solution du problème, en ce qu'elle fait image, et qu'on y voit le mouvement du corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point. Et si de cette démonstration géométrique de la rotation des corps on veut passer au calcul pour mesurer toutes les différentes propriétés ou affections de ce mouvement, on n'a plus que des formules directes et toujours claires, parce que chacune d'elles n'y est que l'expression d'un théorème dynamique dont on a l'idée, et qui tend à son objet. Ainsi, notre analyse présente encore cet avantage, que tout s'y exprime et s'y développe par les seules données immédiates du problème, sans aucun mélange de ces angles ou de ces coordonnées étrangères qui ne tiennent point à la nature de la question, et qui ne viennent que de la méthode indirecte qu'on emploie pour la résoudre. Car c'est une remarque que nous pouvons faire dans toutes nos recherches mathématiques : ces quantités auxiliaires, ces calculs longs et difficiles où l'on se trouve entraîné, y sont presque toujours la preuve que notre esprit n'a point, dès le commencement, considéré les choses en elles-mêmes et d'une vue assez directe, puisqu'il nous faut tant d'artifices et de détours pour y arriver; tandis que tout s'abrége et se simplifie sitôt qu'on se place au vrai point de vue.

J'ai donc pensé qu'une solution si simple, et si propre

à jeter un nouveau jour sur les questions les plus difficiles de la Dynamique, pouvait servir à l'avancement réel de la science, et méritait ainsi l'attention des géomètres; et c'est cette considération philosophique qui m'a surtout déterminé à composer le nouveau Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

Je le divise en trois parties principales : dans la première, je considère le mouvement du corps en lui-même, et les forces qui seraient capables de le produire; dans la seconde, je donne la solution du problème de la rotation des corps libres; et dans la troisième, je développe les calculs qui se rapportent à cette solution.

Mais, pour donner une idée plus précise de ce travail, je vais exposer en peu de mots les notions simples et les premiers principes de notre théorie nouvelle, et parcourir ensuite les théorèmes les plus remarquables qui en sont l'objet et le résultat.

## I.

### DU MOUVEMENT DES CORPS CONSIDÉRÉ EN LUI-MÊME; ET DES FORCES CAPABLES D'UN MOUVEMENT DONNÉ.

*Idée de la rotation simple et de la vitesse angulaire.*

Le seul mouvement de rotation dont nous ayons une idée claire est celui d'un corps qui tourne sur un axe immobile; car on voit clairement toutes les circonférences de cercles que les points du corps décrivent autour de cet axe, et qu'ils peuvent réellement décrire ensemble,

c'est-à-dire sans que leur disposition mutuelle, ou ce qu'on peut nommer la *figure* du corps, soit en rien changée.

Nous avons également une idée nette de la quantité ou de la mesure de cette rotation : car, comme tous les points décrivent en même temps des arcs semblables, le rapport de la vitesse d'un point au rayon du cercle qu'il décrit est le même pour tous les points du corps; et c'est ce rapport constant qui fait la mesure, ou ce qu'on appelle la *vitesse angulaire* de la rotation.

*Composition des mouvements de rotation.*

De ces notions simples, et des premiers éléments de la Géométrie, on peut conclure que si, par deux causes quelconques, un corps tendait à tourner à la fois autour des deux côtés d'un parallélogramme avec deux vitesses angulaires proportionnelles aux longueurs de ces côtés, le corps tournerait sur la diagonale avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur de cette diagonale.

D'où il résulte que des rotations autour de différents axes qui passent en un même point se composent exactement par la même loi que de simples forces appliquées en ce point.

Et cette similitude de composition n'est pas bornée à des rotations dont les axes se croisent en un même point; mais, ce qui est fort remarquable, elle s'étend à des rotations autour d'axes qui seraient situés d'une manière quelconque dans l'espace.

Ainsi, deux rotations autour de deux axes parallèles se composent en une seule, égale à leur somme, autour

d'un axe parallèle, et qui divise la distance des deux premiers en raison inverse des deux rotations composantes. Si ces deux rotations sont de sens contraires, la rotation résultante est égale à leur différence, et la position de son axe se trouve comme s'il s'agissait de deux forces parallèles qui agissent en sens contraires.

Si ces deux rotations parallèles et contraires sont égales, elles ne peuvent jamais se réduire à une seule. Elles forment alors ce qu'on peut nommer un *couple de rotations :* c'est, pour ainsi dire, une rotation *sui generis,* et qui ne peut jamais être ramenée à une rotation simple autour d'aucun axe, quelqu'il soit. Et, en effet, il est très-aisé de voir que le résultat d'un tel couple serait de donner au corps un pur mouvement de *translation* dans l'espace, suivant une direction perpendiculaire au plan de ce couple, et mesuré par son *moment,* c'est-à-dire par le produit d'une des deux rotations multipliée par la distance qui sépare leurs axes parallèles. Un *couple de rotations* équivaut donc à une simple force qu'on appliquerait au centre de gravité du corps, suivant une direction perpendiculaire au plan de ce couple, et qu'on prendrait égale à son moment multiplié par la masse du corps.

De tels couples peuvent se transformer en d'autres équivalents, se tourner et se transporter comme on voudra dans leurs plans, ou dans d'autres plans parallèles, sans que le mouvement du corps en soit changé : ils se *composent* et se *décomposent* exactement par la même loi que les couples de forces; et l'on peut leur appliquer, sans en rien excepter, tous les théorèmes qui concernent les couples ordinaires.

Du parallélogramme des *rotations simples* et du parallélogramme des *couples de rotations*, résulte la composition

de *tant de rotations* qu'on voudra autour d'axes situés d'une manière quelconque dans l'espace; et cette composition générale est entièrement semblable à celle des forces.

Ainsi, comme tant de forces qu'on voudra se peuvent toujours réduire à une seule passant par un point quelconque donné, et à un seul couple; de même tant de rotations qu'on voudra, autour de différents axes situés d'une manière quelconque dans l'espace, peuvent toujours se réduire à une seule rotation autour d'un axe passant par un point pris à volonté, et à un seul couple de deux rotations égales et contraires autour de deux axes parallèles entre eux. Et si, comme pour les forces, on veut une réduction où il n'y ait rien d'arbitraire, on pourra toujours choisir le point dont il s'agit, de manière que le plan du couple de rotations soit perpendiculaire à l'axe de la rotation résultante, lequel devient ainsi ce qu'on pourrait nommer l'*axe central* des couples de rotations (*).

Comme un couple de rotations équivaut à une pure translation du corps suivant la direction de l'axe de ce

(*) On voit la parfaite symétrie de cette composition des rotations et de celle des simples forces. Elles sont presque identiques : car si l'on avait primitivement donné le nom de *force* à la cause capable de faire tourner sur un axe, on aurait eu, pour ces nouvelles forces, une Statique toute semblable. Seulement, dans celle-ci, les simples forces (toujours considérées comme transportées au centre du corps) auraient répondu à nos couples dans la Statique ordinaire, et les couples auraient répondu à nos simples forces. Mais il était bien plus simple et plus naturel de commencer, comme on l'a fait, par donner le nom de force à la cause capable d'un pur mouvement de *translation*, et de voir ensuite dans le couple la cause d'un pur mouvement de *rotation*.

couple, on voit que tout le mouvement du corps se réduit, en dernière analyse, à tourner sur un certain axe déterminé, et à glisser en même temps le long de cet axe. Ce qui est, comme nous le verrons plus loin, le mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.

Voilà, en peu de mots, tout ce qui regarde l'idée de la rotation simple sur un axe, et la composition de semblables rotations autour de différents axes situés d'une manière quelconque dans l'espace. Mais il faut se faire maintenant une idée de la rotation d'un corps autour d'un point sur lequel il semble pirouetter en tous sens.

*Idée de la rotation autour d'un point.*

Le mouvement d'un corps qui tourne sur un axe immobile étant le seul dont nous ayons une idée claire, c'est donc à cette idée qu'il faut tâcher de réduire celle du mouvement d'un corps qui pirouette d'une manière quelconque autour d'un point fixe.

Or on fait voir que ce mouvement, quel qu'il soit, si on ne le regarde que durant un instant, n'est autre chose qu'une rotation simple autour d'un certain axe passant par le point fixe, et dont la direction reste immobile pendant cet instant. D'où l'on conclut que, dans l'instant suivant, c'est de même une rotation simple, mais autour d'un autre axe; et ainsi de suite d'un instant à l'autre : de sorte que le mouvement du corps peut être considéré comme une suite de ces rotations simples et dont chacune ne présente à l'esprit qu'une idée nette. C'est ainsi que, pour se faire l'idée du mouvement d'un point en ligne courbe, on se représente ce point comme décrivant les

côtés successifs d'un polygone infinitésimal inscrit à cette courbe. Et il en est de l'*axe instantané* de rotation dans le mouvement des corps, comme de la *tangente* à la courbe dans le mouvement du point qui la décrit.

*Image sensible de cette rotation.*

Quoique l'analyse précédente soit exacte, et que je me sois efforcé de la rendre claire, il me semble que l'idée d'un corps tournant sur un axe qui varie sans cesse est encore un peu obscure; je veux dire qu'on ne voit pas bien ce qui arrive au corps, et qu'on a de la peine à le suivre dans cette espèce de rotation changeante. Il faut donc tâcher d'éclaircir encore cette idée, et de présenter à l'esprit quelque image plus nette et plus sensible.

Or je fais voir de la manière la plus simple, que *la rotation d'un corps sur un axe qui varie sans cesse de position autour d'un même point fixe, n'est autre chose que le mouvement d'un certain cône, dont le sommet est en ce point, et qui* ROULE *actuellement, sans* GLISSER, *sur la surface d'un autre cône fixe de même sommet.*

Je veux dire que le cône mobile, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec soi, s'il vient à rouler sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu, fera décrire à ce corps le mouvement précis dont on le suppose animé; que la ligne de contact de ces deux cônes sera à chaque instant l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce que l'on appelle l'*axe instantané:* d'où l'on voit comment cet axe est à la fois mobile dans le corps et dans l'espace absolu, décrivant dans l'espace la surface du cône fixe, et dans l'intérieur du corps la surface du cône mobile dont on vient de parler.

Tel est, je crois, le plus haut point de clarté où l'on puisse porter l'idée si complexe et si obscure du mouvement d'un corps qui tourne d'une manière quelconque autour d'un centre fixe. Il n'y a point de mouvement de cette nature qu'on ne puisse exactement produire en faisant rouler un certain cône sur un autre cône fixe de même sommet ; de sorte que si l'on imagine tous les cônes possibles qu'on ferait ainsi rouler l'un sur l'autre, on a l'image fidèle de tous les mouvements possibles dont un corps soit capable autour d'un point sur lequel il a la liberté de pirouetter en tous sens.

Et même, s'il s'agissait d'un mouvement de rotation qui fût discontinu, c'est-à-dire où l'axe de rotation, au lieu de varier de position par degrés insensibles, sauterait brusquement d'une position à la suivante par un angle fini, on pourrait également imiter le mouvement du corps en prenant, au lieu de deux cônes, deux pyramides de même sommet et de faces respectivement égales, et faisant rouler l'une sur l'autre, de manière que la pyramide mobile, tournant sur la commune arête, vînt appliquer l'une après l'autre toutes ses différentes faces sur les faces respectivement égales de la pyramide fixe.

Si le mouvement du corps est donné, il est clair que ces deux cônes ou pyramides sont aussi donnés, aussi bien que la vitesse angulaire de rotation sur la ligne de contact, et, par conséquent, la vitesse avec laquelle l'axe instantané trace à la fois les deux surfaces : et réciproquement, si de ces différentes choses qu'on peut considérer dans l'étude de ce mouvement, trois quelconques sont connues, on peut dire que la quatrième l'est aussi, et le mouvement du corps entièrement déterminé.

Ainsi, la terre tourne en un jour sur son axe, tandis

que cet axe décrit, en sens contraire, un cône droit, autour de l'axe de l'écliptique, et avec une vitesse mesurée par le mouvement rétrograde des équinoxes, et qui est d'environ *quarante-deux tierces centésimales* par jour ; on peut donc déterminer dans la Terre le cône qui, roulant sur le premier, et dans l'intérieur de sa surface, ferait décrire à la Terre le mouvement précis qu'on y observe. Et il est facile de voir que, sur le globe, la circonférence du cercle qui sert de base à ce petit cône mobile est à celle du cercle qui sert de base au cône fixe, comme un jour est au temps de la révolution complète des équinoxes : ce qui ne donne que quelques pieds de longueur (*) à la petite circonférence que le pôle instantané de rotation de la Terre décrit chaque jour à sa surface. (Tout ceci dans l'hypothèse d'une précession diurne uniforme.)

*Idée du mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu.*

De l'idée simple d'un pur mouvement de translation qui emporte à chaque instant toutes les molécules égales du corps par de petites lignes égales et parallèles dans l'espace, et de l'idée simple de la rotation du corps autour d'un axe qui reste immobile pendant cet instant, résulte l'idée complexe du mouvement le plus général que puisse avoir un corps dans l'espace absolu. Il n'y a rien de plus clair que cette résolution d'un mouvement quelconque en deux autres que l'on conçoit parfaitement et qu'on peut même considérer à part, parce qu'ils sont tels que si, à chaque instant, on les exécutait l'un après l'autre,

(*) 5 pieds 2 pouces environ.

on amènerait chaque point du corps au même lieu où il arrive par son mouvement naturel au bout de l'instant que l'on considère.

Mais on pourrait être curieux de se faire une image de ce mouvement réel et unique qui anime le corps, afin de voir en quelque sorte la nature des courbes simultanées que les différents points décrivent, et peuvent réellement décrire ensemble sans que la figure du corps en soit changée.

Or, puisqu'un mouvement de translation peut toujours être considéré comme un couple de rotations égales parallèles et contraires, il s'ensuit que le mouvement d'un corps, quel qu'il soit, peut toujours être réduit à une simple rotation autour d'un axe passant par un point pris à volonté dans l'espace, et à un certain couple de rotations dont le plan sera généralement incliné à cet axe. Mais, au lieu de prendre le point à volonté, on peut toujours le choisir de manière que le plan du couple soit perpendiculaire à la direction de l'axe de la rotation simple; et alors tout le mouvement est réduit à une rotation sur un certain axe déterminé et à une translation le long de cet axe. D'où il résulte que ce mouvement est exactement le même que celui d'une *vis* qui tourne dans son *écrou*. Tous les points du corps décrivent donc, sur des cylindres concentriques, de petits arcs d'*hélices* qui ont toutes le même *pas*. Dans l'instant suivant, c'est une autre vis d'un autre axe et d'un pas différent; et ainsi de suite. D'où l'on voit comment se forment les courbes simultanées que tous ces points décrivent dans l'espace, et le long desquelles ils se meuvent comme dans autant de canaux curvilignes où ils seraient enfermés.

Quelquefois le pas de cette vis est nul, et alors tout le

mouvement se réduit à une simple rotation autour de l'axe de cette vis, lequel devient ce qu'on appelle un *axe spontané* de rotation.

Mais, en général, le pas de la vis n'est pas nul, et il n'y a point d'axe spontané proprement dit : c'est-à-dire que dans le corps il n'y a pas de ligne droite dont tous les points demeurent immobiles pendant un instant. Mais il y a toujours ce qu'on pourrait nommer un *axe spontané glissant*, c'est-à-dire une suite de points tombant en ligne droite, qui n'ont d'autre mouvement qu'une simple translation le long de cette droite.

Telles sont les notions les plus simples et les images les plus claires qu'on puisse se former du mouvement des corps. Le pur mouvement de translation, et le pur mouvement de rotation sur un axe, se conçoivent d'eux-mêmes. Un mouvement quelconque se peut toujours réduire, et cela d'une infinité de manières, à deux pareils mouvements. Or, parmi cette infinité de réductions, il y en a toujours une qui nous présente l'axe de la rotation dans la direction même de la translation : de sorte *que le mouvement le plus général d'un corps est, comme on l'a dit, celui d'une certaine vis qui tourne actuellement dans son écrou.*

Après avoir considéré le mouvement des corps en lui-même, et sous un point de vue purement géométrique, je vais chercher les forces capables de le produire, afin de voir réciproquement quel est le mouvement que doit prendre un corps en vertu de forces quelconques données : ce qui est le problème naturel de la Dynamique.

*Des forces capables d'un mouvement donné.*

Quel que soit le mouvement d'un corps, il existe toujours des forces capables de le produire.

Car, dans le mouvement du corps, on peut considérer chaque molécule comme si elle était en repos, mais animée par une force capable de lui donner la vitesse actuelle qu'on lui suppose. Donc l'infinité des forces semblables, appliquées individuellement à toutes les molécules égales du corps, sont capables d'y produire le mouvement qu'on y observe; et cela même d'une manière spontanée, je veux dire quand bien même ces molécules ne seraient pas liées entre elles, et, par conséquent, sans exciter, dans les liens qui les unissent, aucune traction brusque qui tendît à les rompre.

Telles sont les forces élémentaires capables d'un mouvement donné sur un système de molécules libres, ou liées entre elles comme on voudra.

Mais si ces molécules forment, comme je le suppose ici, un système invariable de figure, il sera permis de composer entre elles toutes ces forces élémentaires, et de les remplacer ainsi par une seule force et un seul couple, lesquels seront également capables du mouvement donné sur le corps *solide* dont il s'agit.

Voyons donc quelle est cette force et quel est ce couple dont l'ensemble répond à un mouvement donné.

Et d'abord, si le corps n'a dans l'espace qu'un pur *mouvement de translation*, de manière que toutes les molécules égales aient des vitesses égales, parallèles et de même sens, il est manifeste que toutes les forces élémentaires capables de produire ces vitesses sont aussi égales, parallèles et de même sens, et, par conséquent, réductibles

à une seule force parallèle et de même sens, égale à leur somme, et qui passe par le centre de gravité du corps. D'où l'on voit, réciproquement, que *l'effet d'une force quelconque appliquée comme on voudra au centre de gravité d'un corps, est d'en transporter toutes les parties dans sa propre direction, et avec une vitesse mesurée par la grandeur de cette force divisée par la masse entière du corps.* Ce qui est, pour ainsi dire, évident de soi-même.

En second lieu, si le corps n'a qu'un *pur mouvement de rotation* sur un axe quelconque, il est évident que les vitesses, et, par conséquent, les forces dont les molécules sont individuellement animées, sont toutes proportionnelles aux distances des molécules à cet axe, et de directions tout à la fois perpendiculaires à ces distances et à l'axe dont il s'agit. Or ces forces élémentaires sont toujours réductibles à une seule et à un couple. Mais si l'axe passe par le centre de gravité du corps, la force est nulle, et tout se réduit à un couple, dont le plan est en général incliné à cet axe. Si, de plus, l'axe est un de ces trois axes rectangulaires qui existent dans tous les corps, et qu'on appelle les trois *axes principaux*, on trouve que le couple est perpendiculaire à cet axe, et qu'il a pour mesure le produit de la vitesse angulaire par le *moment d'inertie* du corps autour de cet axe principal. D'où l'on conclut réciproquement, que *l'effet d'un couple appliqué sur un corps dans un plan perpendiculaire à l'un de ses trois axes principaux, est de faire tourner le corps sur cet axe lui-même, avec une vitesse angulaire égale au moment du couple divisé par le moment d'inertie du corps autour de cet axe.* Or ce seul théorème particulier donne sur-le-champ l'effet d'un couple appliqué sur un corps dans tel plan qu'on voudra.

Et, en effet, quel que soit ce couple, on peut toujours le décomposer en trois autres respectivement perpendiculaires aux trois axes principaux du corps; et divisant chacun d'eux par le moment d'inertie relatif à son axe, on aura les trois vitesses angulaires respectives avec lesquelles ces trois couples tendraient à faire tourner sur leurs axes. Si donc, à partir du centre, on porte sur ces directions trois lignes pour représenter à la fois les axes et les grandeurs de ces trois rotations, et qu'on achève le parallélipipède, on aura, dans la diagonale, l'axe et la grandeur de la rotation à laquelle le couple proposé donne naissance au premier instant; ce qui est, comme on le voit, de la plus grande simplicité.

*Du mouvement que prend un corps en vertu de forces quelconques données.*

Quelles que soient ces forces, on peut toujours les réduire à une seule passant par le centre de gravité du corps, et à un seul couple. Or l'effet de la force est un pur mouvement de translation suivant la direction même de cette force, et l'effet du couple est d'imprimer au corps une rotation autour d'un certain axe passant par le centre de gravité, et dont la direction est déterminée par ce qu'on vient de dire tout à l'heure.

Mais on peut avoir une expression bien plus claire de ce qui regarde la direction que prend l'axe instantané par rapport au plan du couple qui lui donne naissance; et c'est ce que l'on va voir dans l'article suivant.

*De l'ellipsoïde central des corps.*

Si l'on observe que les trois composants du couple proposé donnent trois rotations qui sont *proportionnelles*

à ces couples et *réciproques* aux moments d'inertie autour des trois axes, on reconnaît, par la Géométrie, que l'axe de la rotation résultante se dirige suivant le diamètre qui serait *conjugué* au *plan* du couple dans un ellipsoïde dont les axes seraient de longueurs réciproques aux racines carrées des moments d'inertie du corps autour des mêmes axes.

J'imagine donc qu'autour du centre de gravité du corps, et sur les directions de ces trois *axes principaux*, on construise un ellipsoïde avec des axes dont les carrés soient réciproques aux trois *moments d'inertie* du corps autour des mêmes axes; et j'observe en passant que cet ellipsoïde jouira, dans toute son étendue, de cette propriété remarquable, que le moment d'inertie du corps autour de l'un quelconque de ces diamètres y sera réciproque au carré de la longueur de ce diamètre.

Or, quelles que soient la figure et la constitution d'un corps, il y a toujours dans ce corps un centre de gravité et trois axes principaux aussi nettement déterminés que dans le corps le plus homogène et le plus régulier. On peut donc toujours y concevoir décrit un ellipsoïde tel que je viens de le définir, et qui a ce triple avantage : de mettre à la fois sous nos yeux le centre et les axes principaux du corps; de nous donner tous les moments d'inertie qu'on pourrait avoir à considérer, en montrant chacun d'eux, autour d'un axe ou diamètre quelconque, comme exprimé par une même fonction simple de la longueur de ce diamètre; et enfin, de nous offrir une expression facile de ce qui regarde la position de l'axe instantané, par rapport à celle du couple d'impulsion. Or c'est cet ellipsoïde, dont la considération va jeter le plus grand jour sur la théorie de la rotation des corps, que je nommerai désormais l'*ellipsoïde central*.

*Expression claire du mouvement que prend un corps en vertu d'un couple quelconque.*

Supposons qu'un corps en repos soit frappé par un couple dans un plan quelconque, mené par le centre de gravité, et qu'on peut regarder comme un plan diamétral de l'ellipsoïde central du corps : on vient de voir que l'axe instantané de la rotation à laquelle ce couple donne naissance n'est autre chose que le *diamètre conjugué* au plan de ce couple dans l'ellipsoïde que l'on considère ; et il est clair d'ailleurs que la vitesse angulaire sera mesurée par le moment du couple estimé perpendiculairement à ce diamètre, et divisé par le moment d'inertie du corps autour du même diamètre.

Comme un couple peut toujours être transporté dans un plan quelconque parallèle au sien sans que son effet sur le corps en soit changé, on peut toujours supposer que le plan du couple d'impulsion, au lieu d'être conduit par le centre, soit mené tangent à la surface de notre ellipsoïde; et alors on peut dire :

*Que si un corps est frappé par un couple situé dans un plan quelconque tangent à l'ellipsoïde central de ce corps, le pôle instantané de la rotation à laquelle ce couple donne naissance est précisément au point de contact.*

Et réciproquement, que *si un corps tourne sur un diamètre quelconque de son ellipsoïde central, le couple actuel qui l'anime est dans le plan tangent au pôle.*

Ce qui nous paraît un des théorèmes les plus élégants qu'on puisse offrir en Dynamique sur la théorie si difficile et si obscure de la rotation des corps.

On voit toutes les conséquences claires et faciles qui

découlent de cette lumineuse proposition : mais je ne veux point ici m'y arrêter; il faut que j'avance, et que, par le seul raisonnement, j'arrive de suite à la solution complète du problème qu'on se propose : car il ne s'agit pas seulement de déterminer la rotation du corps au premier instant, mais de voir encore comment cette rotation change d'un instant à l'autre, et de peindre, pour ainsi dire, le mouvement du corps dans toute la suite de son cours.

## II.

### SOLUTION DU PROBLÈME DE LA ROTATION DES CORPS LIBRES.

Et d'abord, il est clair que cet axe de rotation que l'on nomme *instantané* n'est, en effet, immobile qu'un instant; car de la rotation même qu'on suppose autour de cet axe naissent, pour toutes les molécules égales du corps, des forces centrifuges proportionnelles aux rayons des cercles que ces molécules tendent à décrire, et dirigées suivant ces rayons. Or l'axe dont il s'agit n'étant point, par hypothèse, un axe principal du corps, ces forces centrifuges ne se font point équilibre entre elles. Transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, elles donnent bien une résultante qui est nulle, mais leur couple résultant ne l'est point. Il provient donc de la rotation même du corps un couple *accélérateur* dont l'effort, à chaque instant, imprime à ce corps une rotation infiniment petite, laquelle se compose avec la rotation actuelle qui l'anime, et fait ainsi varier l'axe et la grandeur de cette rotation.

Pour étudier le mouvement du corps, il faut donc

commencer par chercher ce couple accélérateur qui provient des forces centrifuges. Or il est très-facile de *voir directement*, ou de *conclure* du principe général de la *conservation des couples*, que si l'on considère deux lignes, dont l'une représente l'axe et la grandeur du couple d'impulsion, et l'autre l'axe et la grandeur de la rotation instantanée, le couple accélérateur dû aux forces centrifuges est toujours représenté, et pour son plan, et pour sa quantité, par la surface du parallélogramme construit sur les deux lignes dont il s'agit : théorème simple et remarquable, qui renferme à lui seul toute la théorie de la rotation des corps, et qui, traduit en analyse, donne sur-le-champ les trois équations si élégantes que l'on doit à Euler, mais qu'on ne démontre ordinairement que par de longs circuits de formules algébriques.

Le couple accélérateur, né des forces centrifuges, étant donc toujours situé dans le plan conduit par l'axe instantané et l'axe du couple d'impulsion, la droite sur laquelle il tend à faire tourner le corps n'est autre chose que le diamètre conjugué au plan de ces deux axes; et, par conséquent, c'est le diamètre qui est à la fois conjugué à l'axe instantané et à sa projection sur le plan du couple. D'où je conclus d'abord que *l'axe sur lequel les forces centrifuges font tourner est toujours situé dans le plan même du couple d'impulsion*.

Donc, si l'on prend deux lignes dont l'une représente cette rotation infiniment petite, l'autre la rotation actuelle, et qu'on achève le parallélogramme, afin d'avoir, dans la diagonale, la ligne qui représente la rotation au bout d'un instant, il est clair que l'extrémité de cette diagonale reste toujours à la même hauteur au-dessus du plan du couple. D'où l'on tire sur-le-champ ces deux corollaires : le pre-

mier, c'est que, *dans tout le cours du mouvement, la vitesse angulaire est proportionnelle à la longueur même du rayon qui va du centre au pôle instantané sur la surface de l'ellipsoïde central ;* le second, c'est que *le plan du couple, considéré sans cesse comme tangent au pôle, reste toujours à la même distance du centre de cet ellipsoïde.*

Mais ce centre est immobile dans l'espace absolu, et le plan du couple toujours parallèle à lui-même : donc *ce plan, qui touche sans cesse l'ellipsoïde central au pôle instantané de rotation, est toujours un seul et même plan fixe dans l'espace absolu.*

Donc le mouvement du corps, ou, ce qui est la même chose, le mouvement de l'ellipsoïde central, est de telle nature, que cet ellipsoïde reste en contact avec un même plan fixe dans l'espace absolu; qu'il tourne à chaque instant sur le rayon vecteur qui va du centre au point de contact, et qu'il tourne avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur même de ce rayon.

Cet ellipsoïde ne fait donc que rouler, sans glisser, sur le plan fixe que l'on considère : car, comme tout son mouvement consiste à tourner pendant un instant sur la ligne menée du centre au point de contact, l'ellipsoïde amène, au bout de cet instant, un nouveau point de sa surface en contact avec ce plan ; et ce nouveau point, qui devient le pôle de la rotation pour l'instant suivant, reste à son tour immobile pendant cet instant; et ainsi de suite à l'infini. D'où il est manifeste qu'aucun de ces points par lesquels l'ellipsoïde vient se mettre en contact avec le plan fixe ne peut jamais glisser sur ce même plan.

Telle est donc l'idée claire et nouvelle qu'on peut se former du mouvement si compliqué et si obscur d'un corps de figure quelconque qui tourne librement, soit

autour de son centre de gravité, soit autour d'un point fixe quelconque, en vertu d'un couple dont il a reçu primitivement l'impulsion dans tel plan donné qu'on voudra.

« Considérez le centre de gravité du corps, ou, si le » corps n'est pas libre, le point fixe qui fait le centre de » sa rotation. Autour de ce point, et sur les directions » des trois axes principaux d'inertie qui s'y rapportent, » imaginez un ellipsoïde construit avec trois axes de lon- » gueurs réciproques aux *bras de l'inertie* du corps au- » tour des mêmes axes, et faites maintenant abstraction » de la figure du corps pour n'y plus voir que celle » de cet ellipsoïde que j'ai nommé l'*ellipsoïde central*.

» Si vous supposez que cet ellipsoïde, dont le centre » est retenu immobile au même point de l'espace, roule » sans glisser sur un plan fixe avec lequel on l'a mis en » contact, vous aurez la représentation exacte du mou- » vement géométrique que suit le corps en vertu du cou- » ple qui l'a frappé dans le plan fixe que l'on considère; » et si vous ajoutez que la vitesse angulaire avec laquelle » il tourne à chaque instant sur le rayon mené du centre » au point de contact est proportionnelle à la longueur » même de ce rayon, vous aurez à la fois le mouvement » géométrique et dynamique de ce corps: c'est-à-dire » que vous verrez avec clarté, non-seulement la suite » continue des lieux que le corps doit venir occuper, » mais encore la proportion des temps qu'il met à les » parcourir. Ce qui est l'idée complète du mouvement » du corps considéré dans le cours infini de sa rotation. »

*Réflexion générale.*

Nous voilà donc conduits par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement ; car, si l'on se contente, comme on le fait d'ordinaire, de traduire les problèmes en équations, et qu'on s'en rapporte ensuite aux transformations du calcul pour mettre au jour la solution qu'on a en vue, on trouvera le plus souvent que cette solution est encore plus cachée dans ces symboles analytiques, qu'elle ne l'était dans la nature même de la question proposée. Ce n'est donc point dans le calcul que réside cet art qui nous fait découvrir, mais dans cette considération attentive des choses, où l'esprit cherche avant tout à s'en faire une idée, en essayant, par l'analyse proprement dite, de les décomposer en d'autres plus simples, afin de les revoir ensuite comme si elles étaient formées par la réunion de ces choses simples dont il a une pleine connaissance. Ce n'est pas que les choses soient composées de cette manière, mais c'est notre seule manière de les voir, de nous en faire une idée, et partant de les connaître. Ainsi, notre vraie méthode n'est que cet heureux mélange de l'analyse et de la synthèse, où le calcul n'est employé que comme un instrument : instrument précieux et nécessaire sans doute, parce qu'il assure et facilite notre marche, mais qui n'a par lui-même aucune vertu propre ; qui ne dirige point l'esprit, mais que l'esprit doit diriger comme tout autre instrument.

Ce qui a pu faire illusion à quelques esprits sur cette espèce de force qu'ils supposent aux formules de l'analyse, c'est qu'on en retire, avec assez de facilité, des vérités déjà connues, et qu'on y a, pour ainsi dire, soi-même introduites; et il semble alors que l'analyse nous donne ce qu'elle ne fait que nous rendre dans un autre langage. Quand un théorème est connu, on n'a qu'à l'exprimer par des équations : si le théorème est vrai, chacune d'elles ne peut manquer d'être exacte, aussi bien que les transformées qu'on en peut déduire; et si l'on arrive ainsi à quelque formule évidente ou bien établie d'ailleurs, on n'a qu'à prendre cette expression comme un point de départ, à revenir sur ses pas, et le calcul seul paraît avoir conduit comme de lui-même au théorème dont il s'agit. Mais c'est en cela que le lecteur est trompé. Ainsi, pour prendre un exemple dans la question même qui fait l'objet de ce Mémoire, il est bien clair qu'aujourd'hui rien ne serait plus aisé que de retrouver nos idées dans les expressions analytiques d'Euler ou de Lagrange, et même de les en dégager avec un air de facilité qui ferait croire que ces formules devaient les produire spontanément. Cependant, comme ces idées ont échappé jusqu'ici à tant de géomètres qui ont transformé ces formules de tant de manières, il faut convenir que cette analyse ne les donnait point, puisque, pour les y voir, il aura fallu attendre qu'un autre y parvînt par une voie toute différente.

Nous aurions bien d'autres réflexions à faire et de plus grands exemples à produire, si nous voulions montrer, d'une part, tout ce que l'esprit doit de lumière à cette méthode naturelle, telle que je l'ai définie plus haut et qui constitue notre véritable analyse; et de l'autre, le peu de vérités nouvelles qu'on a su tirer de ces formules analy-

tiques où l'on croit enfermer une question, et quelquefois même une science tout entière. Sans doute la science y est contenue, comme elle le serait dans tout autre principe énoncé en termes généraux; mais la difficulté reste de l'en faire sortir, et cette difficulté n'en devient-elle pas plus grande? Et, par exemple, ne faut-il pas déjà connaître et la Mécanique et les artifices du calcul, pour tirer de la seule formule générale des vitesses virtuelles, je ne dis pas quelque nouveau théorème (ce dont je ne vois guère d'exemples), mais seulement les propositions particulières qui nous sont le mieux connues? La traduction n'est-elle pas ici plus difficile que le texte lui-même, je veux dire que la considération immédiate des choses que l'on veut étudier? L'illustre auteur qui a voulu transformer la Mécanique en une question de calcul a sans doute rempli son objet avec toute la clarté et toute l'élégance qu'on en pouvait attendre. Mais si la véritable analyse brille quelque part dans la *Mécanique analytique*, j'oserai dire que c'est bien moins dans ces calculs que l'auteur range avec tant d'ordre et de symétrie, que dans ces courts passages où il rapproche les méthodes, et dans ces admirables préfaces qu'il a placées à la tête des différents livres de son ouvrage, où il examine et discute les principes fondamentaux de la science, et fait l'histoire instructive du mouvement de l'esprit humain dans cette suite délicate d'idées fines et de solutions ingénieuses qui ont peu à peu formé la Mécanique. C'est par là surtout que ce bel ouvrage pourra servir aux progrès ultérieurs de l'esprit, en lui montrant la route qu'il a suivie, et qui est encore la route où il doit continuer de marcher. Car, encore une fois, gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous

dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations. N'oublions point que les résultats de nos calculs ont presque toujours besoin d'être vérifiés d'un autre côté, par quelque raisonnement simple, ou par l'expérience. Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que sur ce point même l'esprit n'ait plus rien à faire; mais, au contraire, il faut songer que, cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence; ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique.

Qu'on me pardonne ces réflexions, que je fais, j'ose le dire, dans l'unique intérêt de la science. Je connais le caractère propre et distinctif de l'analyse algébrique, et je pourrais même dire avec précision en quoi cet art a pu perfectionner la logique ordinaire du discours; je sais tout ce que les bons esprits doivent au calcul, mais je tâche d'éclairer ceux qui se trompent sur la nature de cet instrument, et en même temps de prévenir l'abus que d'autres en peuvent faire en profitant de cette illusion même. Car, sitôt qu'un auteur ingénieux a su parvenir à quelque vérité nouvelle, n'est-il pas à craindre que le calculateur le plus stérile ne s'empresse d'aller vite la rechercher dans ses formules, comme pour la découvrir une seconde fois, et à sa manière, qu'il dit être la bonne et la véritable; de telle sorte qu'on ne s'en croie plus redevable qu'à son analyse, et que l'auteur lui-même, quelquefois peu exercé, ou même étranger à ce langage et à ces symboles, sous lesquels on lui dérobe ses idées, ose à peine réclamer ce qui lui appartient, et se retire presque confus, comme s'il avait mal

inventé ce qu'il a si bien découvert? Singulier artifice, que je n'ai pas besoin de caractériser davantage, mais qu'il est bon de signaler comme un des plus nuisibles aux progrès des sciences, parce qu'il est sans contredit un des plus propres à décourager les inventeurs!

Mais je n'étendrai pas plus loin ces réflexions : et si le peu qu'on a dit est assez sensible par les exemples qui précèdent, on les verra se confirmer encore par ceux qui pourront suivre.

## III.

### DÉVELOPPEMENT DE LA SOLUTION.

*Des deux courbes que le pôle instantané de rotation décrit à la fois dans le corps et dans l'espace.*

Dans cette image si claire que nous avons donnée de la rotation des corps, on voit sur-le-champ toutes les circonstances et toutes les variétés que ce mouvement peut offrir, et l'on est conduit comme par la main aux opérations et aux calculs qu'il faut faire, si l'on veut en mesurer toutes les différentes affections.

Et d'abord, cette suite de points par lesquels l'ellipsoïde central du corps vient se mettre en contact avec le plan fixe du couple d'impulsion, étant considérée sur la surface de l'ellipsoïde, y marque la route du pôle instantané dans l'intérieur du corps; et ces mêmes points, étant considérés sur le plan fixe, y marquent sa route dans l'espace absolu. On peut donc déterminer sur-le-champ ces deux lignes courbes, et les considérer comme les bases de deux

surfaces coniques de même sommet, dont l'une, mobile avec le corps, roulant sur l'autre qui est fixe dans l'espace absolu, donnerait à ce corps le mouvement précis qui l'anime.

Pour trouver la première courbe, il n'y a donc qu'à chercher la suite des points où l'ellipsoïde serait touché par un plan mobile qui resterait toujours à la même distance du centre de cet ellipsoïde; ou, ce qui est la même chose, qui toucherait à la fois cet ellipsoïde et une sphère concentrique d'un rayon égal à la distance donnée.

Tandis que ce plan trace sur l'ellipsoïde la route du pôle instantané, on pourrait remarquer qu'il trace sur la sphère la route que le pôle du couple, qui est fixe dans l'espace, paraît décrire dans l'intérieur du mobile; c'est une autre courbe du même genre et que nous aurons aussi l'occasion de considérer.

Mais, pour ne parler ici que de la première, on voit donc que cette courbe est un orbe *fermé*, à *double courbure*, qui a, comme l'ellipse, *quatre sommets principaux* où elle est divisée en quatre parties égales et symétriques; espèce de roue elliptique dont l'axe ou l'*essieu* est toujours, ou le *rayon majeur*, ou le *rayon mineur* de l'ellipsoïde central, selon que le rayon de la sphère est donné plus grand ou plus petit que le rayon moyen de cet ellipsoïde. Cet orbe à double courbure se projette en une *ellipse entière* sur le plan perpendiculaire à celui des deux axes qui lui sert d'essieu, en un *arc d'ellipse* sur l'autre plan, et toujours en un *arc d'hyperbole* sur le plan perpendiculaire à l'*axe moyen*.

Les quatre sommets de cet orbe sont les points où le rayon vecteur, et, par conséquent, la vitesse angulaire de rotation, atteint ses valeurs *maxima* ou *minima*; et l'on

peut remarquer que le *maximum* a toujours lieu quand le pôle instantané passe aux deux sommets qui tombent dans le plan principal *moyen* de l'ellipsoïde; et le *minimum*, quand il passe aux deux autres sommets de la courbe.

La seconde courbe, pouvant être considérée comme tracée par celle-ci qu'on ferait rouler, autour du centre, sur le plan fixe du couple, est donc une *courbe plane;* qui circule autour de la projection de ce centre, en formant des ondes égales et régulières, correspondantes aux arcs égaux et symétriques de l'orbite roulante qui la produit : c'est une espèce de courbe circulaire, mais d'un rayon variable et périodique, et qui serpente ainsi à l'infini entre deux cercles concentriques dont elle va toucher alternativement l'une et l'autre circonférence.

Si l'angle au centre, qui répond à deux sommets consécutifs de ces ondes équidistantes, est commensurable avec quatre angles droits, la courbe se ferme après un certain nombre de révolutions; et le pôle instantané qui la décrit revient au même lieu et dans le corps et dans l'espace tout à la fois. Mais, dans le cas contraire, la courbe ne se ferme point, et le pôle, qui revient toujours périodiquement au même lieu dans le corps, ne peut jamais revenir en même temps au même lieu dans l'espace.

Telles sont les deux courbes décrites par le pôle instantané, l'une dans l'intérieur du corps, et l'autre dans l'espace absolu. Et quoique ces courbes soient de formes si différentes, comme c'est un seul et même point qui décrit à la fois l'une et l'autre, leurs équations prises entre le rayon vecteur et la longueur de l'arc décrit sont exactement une seule et même équation.

Le *cône roulant,* à la surface duquel la première courbe sert de base, est simplement *un cône droit du second degré;*

mais le *cône fixe* sur lequel il roule est un *cône transcendant* dont la surface ondule à l'infini autour de l'axe fixe du couple : c'est aussi une espèce de cône droit et circulaire, mais dont la surface serait, pour ainsi dire, *cannelée* suivant le contour régulièrement ondulé de la courbe qui lui sert de base.

*Des noms qu'on pourrait donner à ces deux courbes.*

On sait qu'un corps pesant, projeté comme on voudra dans l'espace, tourne sur son centre de gravité, exactement de la même manière que s'il était libre de toute pesanteur. On voit donc que les courbes remarquables dont il s'agit sont deux courbes que la nature nous offre à chaque instant dans le mouvement des projectiles, et qu'ainsi chacune d'elles mériterait d'avoir un nom, aussi bien que la courbe qui est décrite dans l'espace par le centre de gravité, et qui s'est trouvée la même que la section conique déjà nommée la *parabole*.

Je proposerais donc de donner à ces deux courbes le nom de *polodies*, en appelant la première, qui est décrite dans l'intérieur du corps, la polodie *relative*; et la seconde, qui est décrite dans l'espace, la polodie *absolue*. Ou, si l'on aimait mieux les distinguer par leur forme particulière, on donnerait à la première courbe, qui est un orbe elliptique et fermé, le simple nom de *polodie*; et à l'autre, qui est plane et ondulée, celui d'*herpolodie*, afin de rappeler, avec l'idée du pôle qui la décrit, la propriété qu'elle a de *serpenter* en circulant autour d'un même centre fixe.

*Variétés que ces deux courbes peuvent offrir dans certains cas particuliers.*

Ces deux courbes ne dépendent, comme on voit, que de quatre données, savoir : les trois demi-axes ou *rayons principaux* de l'ellipsoïde central, lesquels sont toujours donnés par la nature du corps; et ensuite la *hauteur* du centre au-dessus du plan tangent du couple, laquelle est donnée par la direction du couple d'impulsion.

*Cas singulier où la polodie devient une ellipse, et l'herpolodie une spirale.*

Dans le cas singulier où cette hauteur serait donnée précisément égale à la longueur du *rayon moyen* de l'ellipsoïde, la *polodie* devient une *ellipse* dont le plan passe par ce rayon moyen; et alors *l'herpolodie* devient une *spirale,* laquelle, considérée dans toute son étendue, est en quelque sorte une spirale *double;* je veux dire qu'elle a un sommet, à gauche et à droite duquel elle jette deux branches égales qui vont en sens contraires tourner en spirales autour d'un même centre fixe : centre dont elles s'approchent sans cesse, et de plus près que tout ce qu'on voudra, comme d'un *point asymptotique* qu'elles ne peuvent jamais atteindre. Dans ce cas singulier du mouvement des corps, le pôle instantané de la rotation est donc un point toujours nouveau et dans le corps et dans l'espace absolu, quoique la longueur de la spirale décrite soit finie et tout au plus égale à la demi-circonférence de l'ellipse roulante qui la produit.

*Cas particuliers où elles se réduisent à un point.*

Si la distance du centre au plan tangent est donnée égale à l'un des deux *rayons extrêmes* de l'ellipsoïde; comme cela ne peut arriver qu'en un seul point de la surface, la polodie et l'herpolodie se réduisent toutes deux à un seul et même point, et le pôle instantané reste immobile et dans le corps et dans l'espace pendant tout le cours du mouvement; et la même chose aurait encore lieu dans un cas unique (appartenant au cas singulier qui précède), celui où le plan du couple serait donné tangent au point précis qui fait le pôle *moyen* de l'ellipsoïde central du corps.

*Cas particulier relatif à l'espèce du corps, et où les deux courbes deviennent des cercles.*

Enfin, si le corps est de l'espèce de ceux qui ont deux de leurs moments principaux d'inertie égaux entre eux, auquel cas l'ellipsoïde central est de *révolution*, la polodie devient un *cercle* autour de l'axe de ce sphéroïde, et l'herpolodie est un autre *cercle* autour de l'axe fixe du couple. Dans tous les corps de cette espèce, le mouvement est celui d'un cône droit à base circulaire qui roule uniformément sur un autre cône fixe également droit et circulaire. C'est un des cas les plus simples du mouvement de rotation, mais où il faut pourtant remarquer que, si les circonférences des deux cercles dont il s'agit ne sont point commensurables entre elles, ce qui arrive le plus généralement, le pôle instantané ne peut jamais revenir en un point qui tombe à la fois au même lieu dans le corps et au même lieu dans l'espace absolu.

Il est inutile de parler du cas le plus simple de tous, de celui où l'ellipsoïde central du corps est une sphère parfaite : car, de quelque manière que le couple soit appliqué, l'axe de la rotation et celui du couple se confondent, et le pôle instantané reste immobile dans le corps et dans l'espace absolu.

*Vitesse du pôle, soit pour décrire ces deux courbes, soit pour s'approcher ou s'éloigner du centre, soit pour circuler autour de l'axe fixe du couple, etc.*

Après avoir examiné la nature de ces deux courbes décrites par le pôle, et dont l'équation différentielle est la même entre l'arc et le rayon vecteur émané du centre de l'ellipsoïde, on peut considérer la vitesse avec laquelle ce pôle instantané décrit à la fois l'une et l'autre ; la vitesse qu'il a pour s'éloigner ou se rapprocher du centre, ce qui est la *fluxion* du rayon vecteur, et, par conséquent, de la *vitesse angulaire* de rotation ; on peut chercher le mouvement angulaire du pôle autour de l'axe fixe du couple d'impulsion, etc. Il est donc facile de déterminer les points remarquables où ces différentes vitesses passent à leur *maximum* ou *minimum ;* et c'est ce qui arrive aux sommets alternatifs des ondes de l'herpolodie.

On pourra simplifier ensuite l'équation de l'herpolodie, en la rapportant à un rayon vecteur émané de son propre centre, pris dans le plan même de la courbe, et à l'angle que ce rayon décrit autour du même centre, etc., etc. Et toutes ces expressions n'auront aucune difficulté.

*Détermination du lieu où le corps arrive au bout d'un temps donné.*

Enfin, si l'on veut trouver les formules par lesquelles on puisse calculer le lieu du corps au bout d'un temps donné, on commencera par déterminer la vitesse angulaire de rotation en fonction du temps, ce qui se fera par une première intégration, et donnera le lieu du pôle instantané à la surface de l'ellipsoïde central. Ensuite on intégrera l'équation précédente de l'herpolodie, ce qui donnera le lieu du pôle sur le plan fixe du couple. Et par ces deux *quadratures*, qui se rapportent naturellement aux *transcendantes elliptiques*, on pourra dire que le problème proposé est entièrement résolu; je veux dire qu'on sera en état *d'assigner actuellement le lieu de l'espace où doit se trouver le corps au bout d'un temps quelconque donné*. En effet, on n'aura qu'à supposer l'ellipsoïde mis en contact avec le plan fixe, de manière qu'il touche par le point qu'on vient de déterminer à sa surface, et au point qu'on vient de déterminer sur le plan dont il s'agit; et par cette opération, l'ellipsoïde central, et, par conséquent, le corps lui-même se trouvera posé dans le lieu précis de l'espace où il arrive par son mouvement naturel au bout du temps donné.

On peut varier ces déterminations de plusieurs manières, en prenant d'autres inconnues relatives à la position du corps; mais, quelles que soient les coordonnées qu'on emploie, l'expression de ces quantités en fonction du temps demandera toujours *deux intégrations* qui dépendent essentiellement des *transcendantes elliptiques*.

Dans le *cas singulier* où la hauteur du centre au-dessus

du plan fixe est égal au rayon *moyen* de l'ellipsoïde, et où, par conséquent, la polodie devient une simple *ellipse*, et l'herpolodie une *spirale*, la difficulté s'abaisse; tout se réduit aux règles ordinaires, et ne dépend que des *exponentielles* ou des *logarithmes*.

Enfin, pour tous les corps où l'ellipsoïde central est de *révolution*, et où, par conséquent, tout devient uniforme et circulaire, on n'a besoin d'aucune intégration pour déterminer le lieu du corps au bout d'un temps donné.

*Propriétés des trois axes principaux du corps, relatives à la stabilité de la rotation.*

Quand le plan du couple d'impulsion est tel que le pôle instantané tombe sur l'un des pôles principaux de l'ellipsoïde central, il y reste toujours; de manière que l'axe instantané, l'axe du corps et celui du couple ne cessent de se confondre en une seule et même droite immobile dans tout le cours du mouvement. Les axes principaux du corps sont donc tous trois des axes permanents de rotation; mais il y a entre eux, comme on le sait, une différence remarquable sous le point de vue de la stabilité que chacun de ces axes peut offrir dans la rotation du corps.

Si le pôle instantané tombe actuellement au pôle *majeur* ou au pôle *mineur* de l'ellipsoïde, et que par l'impulsion de quelque petit couple étranger, il vienne à en être écarté à une petite distance, il ne s'en éloignera guère davantage, parce qu'il décrira sa *polodie* autour de ce pôle même du corps d'où il a été écarté. Mais il n'en est pas de même quand le pôle instantané tombe au

pôle *moyen* de l'ellipsoïde; car, pour peu qu'on le dérange, il s'en éloignera davantage, s'en allant alors décrire sa polodie, soit autour du pôle majeur, soit autour du pôle mineur, selon que ce dérangement accidentel du pôle instantané aura fait augmenter ou diminuer la distance du plan tangent du couple au centre de l'ellipsoïde. Et si ce dérangement est tel que cette distance n'ait pas varié, ce qui arrive à la surface le long de deux ellipses singulières qui se croisent au pôle *moyen*, le pôle instantané ira décrire l'ellipse singulière sur laquelle on l'aura porté, ou plutôt la moitié de cette ellipse, pour aller retomber sur le pôle moyen *opposé* de l'ellipsoïde, ce qui est le plus grand dérangement qui puisse arriver au corps : ou bien, si le pôle instantané était porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il reviendrait aussitôt au pôle moyen d'où il est parti, ce qui est le plus petit dérangement possible de la rotation du corps. Il y a donc ici un cas unique où l'axe instantané de rotation, étant écarté de l'*axe moyen* où il était d'abord, non-seulement ne s'en éloigne pas davantage, mais même s'en rapproche aussitôt, et de plus près que tout ce qu'on voudra. Mais, dans tous les autres cas, il va décrire un cône elliptique, soit autour de l'axe majeur, soit autour de l'axe mineur, ou tracer le plan de l'une ou de l'autre des deux ellipses singulières dont j'ai parlé : et l'on peut dire que la rotation du corps autour de son *axe moyen* n'a point de stabilité.

La rotation n'est donc *stable* qu'autour de l'axe *du plus grand* ou du *plus petit* moment d'inertie du corps : mais il n'en faut pas conclure qu'elle soit également stable pour ces deux axes; car, si l'un d'eux diffère peu de l'axe moyen, il n'aura guère plus de stabilité que

l'axe moyen lui-même, comme on va le voir tout à l'heure.

*De ce qui fait la mesure de la stabilité pour chacun des deux axes extrêmes de l'ellipsoïde central.*

Pour se faire une idée nette de cette stabilité, et de ce qui en fait en quelque sorte la mesure pour chacun de ces deux axes, imaginez la surface de l'ellipsoïde comme coupée en quatre parties ou fuseaux elliptiques par les deux ellipses que j'ai considérées et dont les plans se coupent suivant l'axe moyen. Le *pôle moyen* est donc à l'intersection de ces deux ellipses; le pôle majeur est au centre de l'un des deux fuseaux, et le pôle mineur au centre du fuseau supplémentaire.

Or, en premier lieu, si le pôle instantané de la rotation tombe au *pôle moyen* de l'ellipsoïde, il est clair que, pour peu qu'on le déplace, il va tomber dans l'un ou l'autre des deux fuseaux dont il s'agit, et décrire son orbe ou sa polodie autour de l'un ou de l'autre pôle principal de l'ellipsoïde : ou bien, si on le déplace sur une des deux ellipses mêmes, il va décrire la moitié de cette ellipse pour retomber sur le pôle moyen opposé; ou, s'il est porté sur l'autre moitié de la même ellipse, il revient aussitôt au pôle moyen même d'où on l'a écarté. D'où il résulte, comme on l'a dit ci-dessus, que, hors de ce cas unique de déplacement, l'axe moyen du corps n'a aucune stabilité.

Actuellement, si le pôle instantané tombe sur le pôle *majeur* de l'ellipsoïde, il peut être déplacé, comme on voudra, dans toute l'étendue du fuseau environnant, sans cesser de décrire sa polodie autour du même pôle majeur : et si c'est en cela qu'on fait consister la stabilité de l'axe

majeur, on peut dire que la grandeur de ce fuseau en est en quelque sorte la mesure. Et l'on voit de même que l'étendue du fuseau supplémentaire est la mesure de la stabilité de la rotation autour de l'axe *mineur*. Or, si l'un de ces deux axes diffère peu de l'axe moyen, le fuseau qui lui répond est très-petit, et le fuseau supplémentaire est très-grand. L'axe peu différent de l'axe moyen a donc très-peu de stabilité, et l'autre axe en a beaucoup. Il n'est donc point exact de dire, comme on le fait d'ordinaire, que si l'axe instantané est un peu écarté de l'axe principal qui répond au plus petit, ou au plus grand moment d'inertie du corps, il s'en éloigne très-peu et ne fait que de petites oscillations pendant toute la durée du mouvement. Car si le moment d'inertie relatif à cet axe diffère peu du moment moyen, le pôle instantané, par un petit dérangement, peut sortir du petit fuseau où il est actuellement, pour tomber dans le fuseau voisin et y aller décrire sa polodie autour de l'autre axe; ou même, s'il n'est déplacé que dans l'intérieur du petit fuseau qui lui répond, il peut y décrire une polodie étroite et fort allongée, et, par conséquent, faire de très-grandes oscillations autour du pôle principal d'où on l'a écarté.

Dans les corps où l'un des moments extrêmes d'inertie diffère peu du moment moyen, et, par conséquent, où l'ellipsoïde central du corps est presque de révolution autour de l'un de ses axes, la stabilité de la rotation n'est donc vraiment assurée que pour cet axe. C'est le cas de la Terre, dont la rotation est très-stable autour de son axe actuel, et le serait très-peu autour du troisième axe qui, comme on le sait, diffère très-peu de l'axe moyen.

*Mouvement des axes principaux du corps dans l'espace absolu.*

Nous avons considéré le mouvement du pôle instantané de rotation, et dans le corps, et dans l'espace : mais on pourrait demander quels sont les mouvements des pôles mêmes de l'ellipsoïde central; leurs vitesses pour circuler autour de l'axe fixe du couple d'impulsion, pour s'abaisser ou se relever sur le plan perpendiculaire à cet axe, ce qui donne leurs mouvements naturels de *précession* et de *nutation*. On peut examiner la nature et les propriétés des trois courbes, ou *herpolodies*, que les projections de ces trois pôles principaux tracent en même temps sur le plan fixe, etc., etc., et l'on trouvera de la manière la plus facile beaucoup de propriétés curieuses sur le mouvement des corps.

Et par exemple, *je suppose qu'on prenne, sur les trois axes principaux du corps, et à partir du centre, trois lignes de même longueur; si, pendant le mouvement du corps, on regarde les trois secteurs que leurs projections décrivent sur le plan du couple, on trouvera que la somme de ces trois aires variables est proportionnelle au temps.*

*Que si, au lieu de prendre, sur les axes principaux, trois lignes égales, on prend trois lignes proportionnelles aux racines carrées des moments d'inertie, ou à ce que je nomme les* BRAS DE L'INERTIE DU CORPS *autour des mêmes axes, on trouvera que la somme des aires tracées par les projections de ces lignes inégales est aussi proportionnelle au temps.*

Théorèmes simples et en quelque sorte géométriques, qu'il faut distinguer du théorème dynamique sur les aires tracées par tous les rayons vecteurs menés aux molé-

cules du corps, quoiqu'il soit facile de rapprocher ces expressions, qui viennent au fond du même principe.

On trouvera des théorèmes analogues relatifs aux mouvements de *nutation* des trois axes principaux du corps, vers le plan fixe du couple d'impulsion. Et en effet, *si l'on considère les trois pôles principaux de l'ellipsoïde central, on verra que la somme des carrés de leurs distances à l'axe du couple est constante;*

*Et que la somme de ces carrés multipliés respectivement par les moments d'inertie du corps est aussi constante dans tout le cours du mouvement.*

Enfin, si l'on considère les courbes décrites par les projections de ces pôles sur le même plan fixe, on verra que ces courbes sont du même genre que l'herpolodie décrite par le pôle instantané de rotation.

Dans le cas général, celui des deux pôles, *majeur* ou *mineur*, qui fait le centre de la polodie, décrit une courbe qui forme, comme l'herpolodie, des ondes égales et régulières autour du même centre. Les sommets supérieurs de l'une répondent aux sommets supérieurs de l'autre, et les inférieurs aux inférieurs. Pendant ce temps, les deux autres pôles décrivent aussi des courbes régulièrement ondulées : mais, quand l'un passe aux sommets supérieurs de sa courbe, l'autre passe aux sommets inférieurs de la sienne; et cela, à un angle droit de distance l'un de l'autre.

Dans le *cas singulier* où la polodie est une *ellipse* et l'herpolodie une *spirale*, le *pôle moyen* du corps décrit aussi une spirale qui va sans cesse en se rapprochant du centre, et de plus près que tout ce qu'on voudra, sans pouvoir jamais l'atteindre : les deux autres pôles décrivent aussi des spirales, mais en quelque sorte d'une autre

espèce; car chacune de ces spirales, au lieu de s'approcher du centre, s'en éloigne depuis une certaine distance *minimum* jusqu'à une distance *maximum* qu'elle ne peut jamais atteindre; de sorte qu'elle va sans cesse en s'épanouissant vers une circonférence de cercle qui en est comme l'asymptote.

On peut faire encore une remarque curieuse sur ce cas singulier du mouvement des corps : c'est qu'il y a dans le plan moyen de l'ellipsoïde central un certain diamètre qui a cette propriété remarquable de rester toujours perpendiculaire à l'axe fixe du couple d'impulsion, de décrire ainsi le plan même de ce couple, et de le décrire d'un mouvement uniforme; de sorte *que tout le mouvement du corps consiste à tourner sur ce diamètre singulier avec une vitesse variable, tandis que ce diamètre décrit uniformément un cercle dans l'espace.*

Quand l'ellipsoïde central est de révolution, le pôle de la figure décrit un cercle, comme le pôle instantané. Dans ce cas, il n'y a, à proprement parler, d'autre pôle que celui qui fait l'extrémité de l'axe du sphéroïde : mais si l'on voulait en marquer arbitrairement deux autres sur l'équateur, à un angle droit de distance, et considérer les deux courbes que leurs projections décrivent, on aurait deux courbes parfaitement égales, mais non point circulaires : ce seraient deux herpolodies égales autour du même centre, et dont les sommets de noms différents seraient toujours à un angle droit de distance l'un de l'autre.

Nous aurions encore à présenter de nouvelles propriétés et de nouvelles images de la rotation des corps. Et par exemple, il est aisé de voir que ce *mouvement est de telle nature, que l'ellipsoïde central se trouve coupé sans*

*cesse par le plan fixe du couple d'impulsion suivant une ellipse dont la forme varie, mais dont la surface demeure constante dans tout le cours du mouvement.*

De sorte que, si l'on se représentait l'ellipsoïde central du corps comme plongé dans un fluide sans résistance, dont ce plan fixe serait le niveau, on pourrait dire que, pendant le mouvement du corps, la section à fleur d'eau reste toujours de même grandeur.

Et de là on peut passer à une nouvelle image du mouvement du corps, et *le représenter par celui d'un cône elliptique qui roule sur le plan même du couple d'impulsion avec une vitesse variable, et qui glisse sur ce plan avec une vitesse uniforme;* etc., etc. Mais toutes ces propriétés seront développées dans le Mémoire.

On voit combien ces images éclaircissent et rectifient les idées, même dans les points les plus élémentaires de la théorie de la rotation des corps. Ceux qui cultivent la géométrie des surfaces du second ordre en tireront sans peine une foule de propriétés curieuses sur ce mouvement; car chaque proposition de Géométrie pourra leur donner un théorème correspondant en Dynamique. Mais le grand avantage de nos principes est d'offrir des démonstrations faciles de ces mouvements de *précession* et de *nutation* des équateurs des corps célestes, du *mouvement des nœuds* de leurs orbites, etc.; de simplifier ainsi, et quelquefois de rectifier ces théories difficiles, comme on en a déjà vu un exemple dans la détermination de ce plan *unique* et *invariable* des aires que j'ai nommé l'*équateur* du système du Monde.

FIN.

Fig. 3
B
C
P
P'
Z
Fig.
O
C
Z
42.
L
H
C
K
I
B
Q

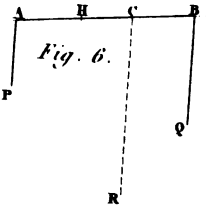



*Fig. 6.*

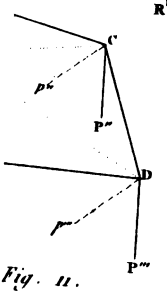



*Fig. 11.*

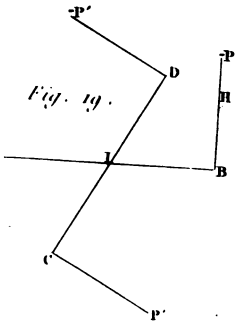
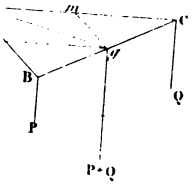



*Fig. 19.*

*Fig. 23. (bis)*



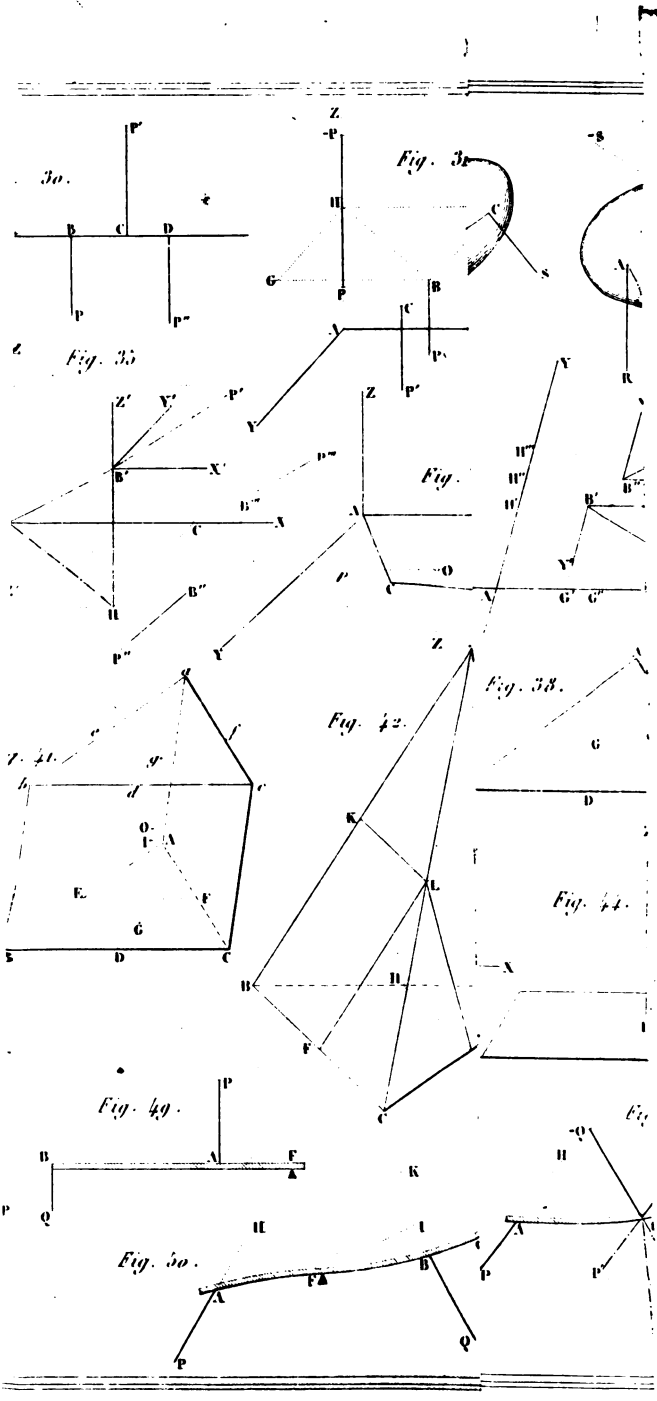
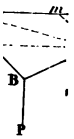


Fig. 30.
Fig. 31
Fig. 33
Fig. 38.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 44.
Fig. 49.
Fig. 50.

Fig.

Fig.

Fig. 2



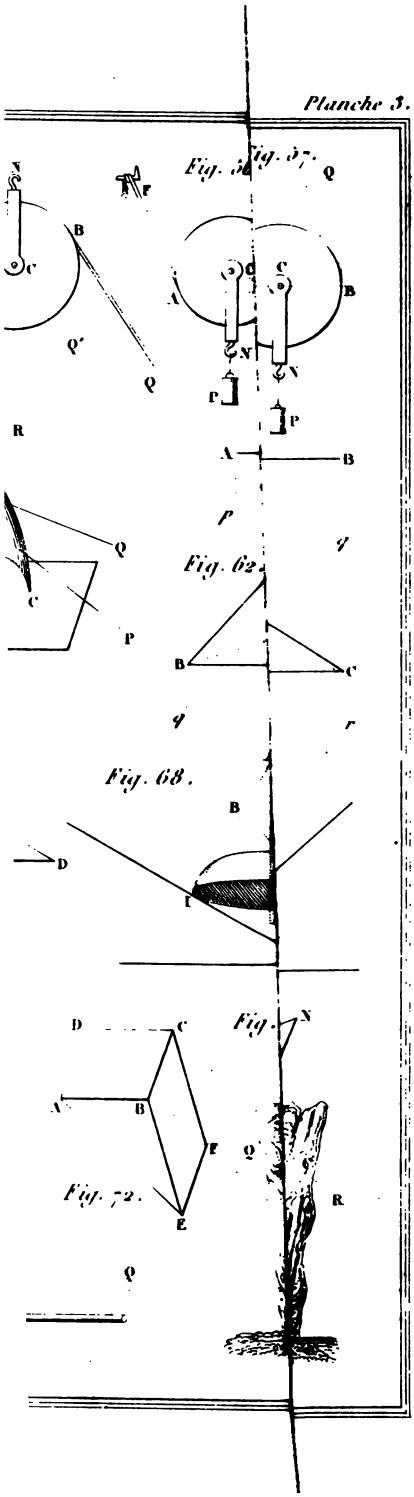
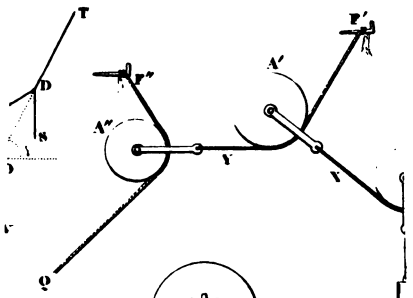


Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 62.
Fig. 68.
Fig. 72.
Fig.
A
B
C
D
E
F
N
P
Q
Q'
R
p
q
r



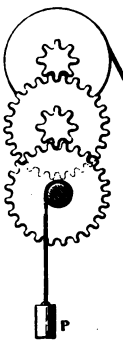




Fig. 85.

84.

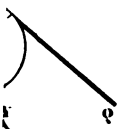
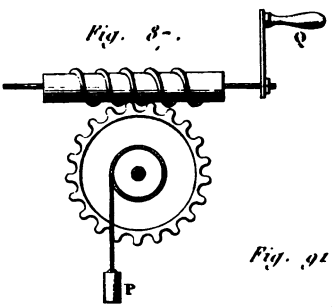



Fig. 86

Fig. 87.



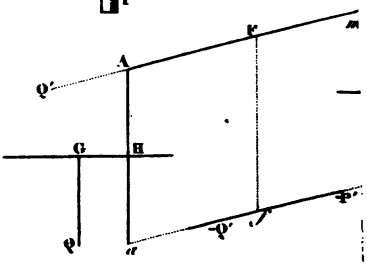


Fig. 91.